No. 1
Date. 2002・9・9

齋藤政彦氏.

Cpx Geom からの入門

Introduction

1. Gromov − Witten Invariants. (数学的定義)

Gromov が pseud hol curve を定義 → カウントすると
ぶつり top. f. theory から予想されていた.

1. alg. var. については 代数的定義
2. Sym. mfd 〃 symplecticな 定義

計算は大変 (de Rham みたく 局所で はできない)
(ていぎはかんたん)

2. $g=0$ version ⇒ 量子コホモロジー環
　. 可換な、単位元をもつ、結合法則
　をみたす環 — WDVV eq.

2次元 位相的場の理論 から WDVV がでてきた。
これに注目し、そういうもの のもつ性質をかんがえたとき、

⇓

Saito. Kyoji structure
(flat structure)

Dubrovin ⇝ Frobenius str. (Saito str. と同じ)

どう classify されるか、などがもんだい。

☆ lecture では ミラー対称性 が このへんのハナシ.

このlecture G-W inv. mirror sym. (higher genus).

No. 2

Date.

1. Gromov-Witten invariant

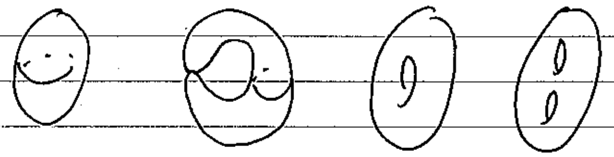
V : complex projective manifold.

$V \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$: フビニ-スタディ計量 (Kähler) ω

$\omega|_V$

↑ Kähler mfd.

C : a curve. $\Leftrightarrow$ 1 dimensional compact connected analytic variety



$g=0$ $g=1$ $g=1$ $g=2$

g : 種数

$g = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$

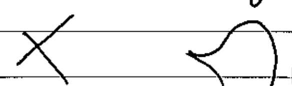
$g=0$

Def : ① $(C, \{x_1, \cdots, x_n\})$: prestable curve

$\Leftrightarrow$ 1. C : a connected curve with only ordinary double points as singularities

2. $x_i \in C_{smooth} = C - \{sing.\ pt\}$

$i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.



$xy=0$ $y^2 - x^3 = 0$

O.K NG

special pt := $\{$ sing. pt の逆像, $x_1, \cdots, x_n \}$.

↑ normalization

No. 3

Date.

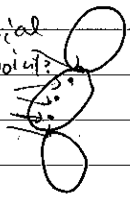
② $(\underbrace{C, \{x_1, \cdots, x_n\}}_{\text{prestable curve}}, f)$ stable map.

$f: C \to V$: hol map s.t. inf. autorphism = trivial

infinitesimal

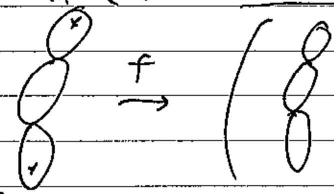
これ[illegible]

$C = \bigcup_i C_i$ $\begin{cases} g(\hat{C}_i) = 0 & f(C_i) = 1pt \Rightarrow \tilde{C}_i \text{ has at least 3 special points} \\ g(\hat{C}_i) = 1 & f(C_i) = 1pt \Rightarrow \tilde{C}_i \text{ has at least 1 special pt.} \end{cases}$



special point?

⇝ map の aut がない



x_1 ← curve としては stable ではない.

f

x_2

map は stable

Def $(C, \{x_1, \cdots, x_n\})$ pre stable curve.

$(C, \{x_1, \cdots, x_n\})$ Stable

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Aut}^0(C, \{x_1, \cdots, x_n\}) = \{1_C\}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \hat{C}_i & g(\hat{C}_i) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_i \text{ has at least 3 sp. pt} \\ \hat{C}_i & g(\hat{C}_i) = 1 \Rightarrow \tilde{C}_i \text{ has at least 1 sp. pt.} \end{cases}$

Def. V.

$\beta \in H_2(V.\mathbb{Z})$

$\underset{\text{curve}}{C \subset V}$. $[C] \in H_2(V.\mathbb{Z})$

$g \geq 0$, $n \geq 0$

$\mathcal{M}_{g.n}(V.\beta)$: moduli functor (stack) ← まじめにやるとstackで (Manin の本をよめばよい) (moduli functorをましたもの)

~~S : complex variety~~,

◎ $\mathcal{M}_{g.n}$ stable curve a moduli functor

* $\underset{\text{set}}{\underline{\mathcal{M}_{g.n}(S)}} = \{ \pi : \mathcal{C} \to S$ flat family of genus g curve

$p_i : S \to \mathcal{C}$: section $i = 1, \cdots, n$

${}^\forall s \in S$ $(\mathcal{C}_s, p_1(s), \cdots, p_n(s))$ stable genus g n pointed curve $\} /$ isom.

$\mathcal{M}_{g.n}$は Schem Sに対して S上の genus g curveのflat family で…とみたすもの全体を同型でわったものという集合を対応させるfunctor

$$\boxed{(\text{Scheme}) \xrightarrow{\mathcal{M}_{g.n}} (\text{Set})}$$

Def. $\mathcal{M}_{g.n}$ is representable by a scheme $\underline{M_{g.n}}$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, \mathcal{C} \to M_{g.n}$ univ. family of genus g curve n pt curve. (p_i)

$\forall S$: scheme

set $\mathcal{M}_{g.n}(S) \cong \mathrm{Hom}(S, M_{g.n})$

$(\mathcal{C} \to S, p_i) \longleftrightarrow$ $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times_{M_{g.n}} S \to \mathcal{C}$, $S \xrightarrow{h} M_{g.n}$, p_i

---

(↑ の中の obj に finit aut. があると representable でない。 (uniqueにきまらない?))

* S : scheme.

$\underline{\mathcal{M}_{g.n}(V.\beta)(S)}$: moduli functor. ← stable function の moduli functor

$= \left\{ \begin{array}{l} (\varphi : \mathcal{C} \to S, p_1, \cdots, p_n) \text{ family of } (g.n) \text{ prestable curve} \\ \mathcal{C}_s \subset \mathcal{C} \xrightarrow{f} V \times S \quad \text{family of stable map} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ s \in S \\ \text{s.t. } f(\mathcal{C}_s) \subset V \\ [f(\mathcal{C}_s)] = \beta \end{array} \right\} / \text{isom}$

Fact : Functors $\mathcal{M}_{g.n}$, $\mathcal{M}_{g.n}(V.\beta)$ is not representable.

($\mathcal{C}$に自己同型があるとダメ)

↑ これに条件をつけるとよい。 represent

それはどこまでも aut は みとめていいかげど りさんするんじゃ あるかも

(きもち) $M_{g.n,\alpha} \longrightarrow M_{g.n}/G$ 有限群 ← わったらだめ.

(fibera その各obj に条件をつける) localに てきとうにあげておけばよい

$\mathcal{M}_{g.n}$ and $\mathcal{M}_{g.n}(V.\beta)$ has coarse moduli sp.

$M_{g.n}$, $M_{g.n}(V.\beta)$ scheme cpx variety.

projective scheme

$M_{g.n}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}_{g.n}(\mathrm{Spec}\, \mathbb{C})$ stable curve の同型類.

↑ $\mathbb{C}$ valued pts

familyはわってないけど 同型類が対応

つづく.

No. 6

Date.

proj. scheme

$\overline{M}_{g,n}(V,\beta)(\mathbb{C}) \simeq \overline{M}_{g,n}(V,\beta)(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C})$ st. map の同型を

◎ Stack の御利益　　宗教

$\mathcal{C}_{g,n}$

$\downarrow$　　universal family が存在する

$\overline{M}_{g,n}$. moduli stack

(scheme) → (category)

scheme だけど、交点理論は定まる。

☆ $H^*(\overline{M}_{g,n}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k(\overline{M}_{g,n}, \mathbb{Q})$: コホモロジー環

cup 積

$H^k(\ \ ) \times H^l(\ \ ) \to H^{k+l}(\ \ )$

$(\gamma_1, \gamma_2) \longmapsto \gamma_1 \cup \gamma_2$: cup prod

diff. form $\rightsquigarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2$

● $H^*(\overline{M}_{g,n}, \mathbb{Q})$ の構造をしらべるのは大事

重力付き G-W inv (V=pt)

● Witten の2次元重力 ⇒ この上の intersection から相関関数

⇒ ある種の KdV eq をみたす。

◎ これを拡張したというのが流れ、らしい。

$H^*(V,\mathbb{Q})^{\otimes n} = H^*(V^n,\mathbb{Q})$

No. 7

Date.

V の invariant.

cpx str の変形で変わらないようにする

☆ $\boxed{\text{Gromov-Witten inv}}$　　$H^*(V,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k(V,\mathbb{Q})$

$g\geq 0,\ n\geq 0,\ \beta\in H_2(V,\mathbb{Z})$　　V の coh. ring.

これのこと → $\boxed{\Phi^V_{g,n,\beta}} : H^*(V,\mathbb{Q})^{\otimes n} \longrightarrow \boxed{H^*(\overline{M}_{g,n},\mathbb{Q})}$: $\mathbb{Q}$-linear map (?)

$\gamma_1\otimes\gamma_2\otimes\cdots\otimes\gamma_n \longmapsto \Phi^V_{g,n,\beta}(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_n)$

axiom GW-0, …, 8 (Manin-Kontsevich)

$\overline{M}_{g,n}(V,\beta) \xrightarrow{\pi}$

$$\begin{tikzcd} & V^n \times \overline{M}_{g,n} \supset C^V_{g,n,\beta} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ V^n \arrow[rr, bend left] & & \overline{M}_{g,n} \end{tikzcd}$$

これは何か？

○ ∃ $C^V_{g,n,\beta}$: alg. cycle on $V^n\times\overline{M}_{g,n}$

$$\boxed{\Phi^V_{g,n,\beta}(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_n) = p_{2*}\left(p_1^*(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_n) \cup C^V_{g,n,\beta}\right)}$$

$\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_n \in H^*(V^n,\mathbb{Q})$

coarse moduli scheme　　($2g+3\geq 0$?)

(prest. curve) →stab (stable curve)

$\pi : \overline{M}_{g,n}(V,\beta) \longrightarrow V^n\times\overline{M}_{g,n}$

$(C,(x_1,\cdots,x_n),f) \longmapsto ((f(x_1),\cdots,f(x_n)), \mathrm{stab}(C,\{x_1,\cdots,x_n\}))$

stabilization　　map があるとすると stable でなくなるから stabilize する。

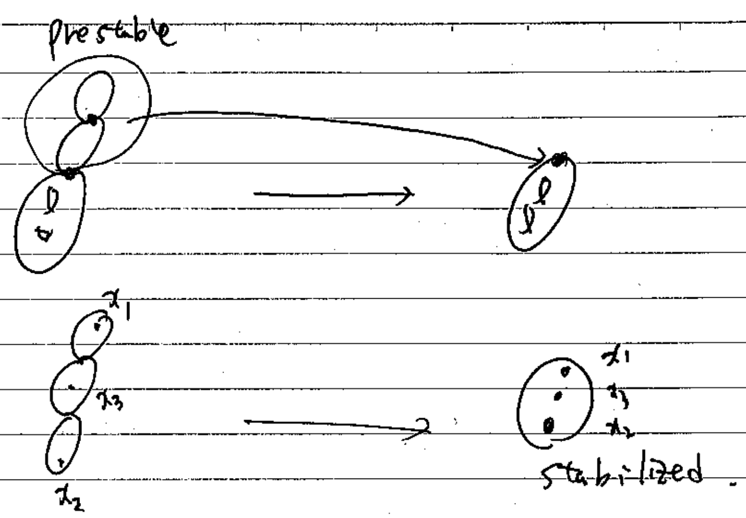
◎ 同型類 scheme str. を忘れる

$(C,\{x_1,\cdots,x_n\}) \longmapsto \mathrm{stab}(C,\{x_1,\cdots,x_n\})$

pre stable　　点はへらない

次の式　　つづく

No. 8
Date.



$\underline{\underline{v(g,n,V,\beta)}} = (\dim_{\mathbb{C}} V - 3)(1-g) - (K_V \cdot \beta) + n$

$\left(K_V := \overset{\dim V}{\wedge} T_V^*\right)$

＊ 非常にまれに、$M_{g,n}(V,\beta)$ の次元が上に一致する

たいていは．$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} M_{g,n}(V,\beta) \geq v(g,n,V,\beta)}$

＊ $\pi_*([M_{g,n}(V,\beta)]) = C^V_{g,n,\beta}$ としたいが．

$\uparrow$

次元が大きすぎる。　　どうする？

?

① Behrend. Behrend-Fante...

$[M_{g,n}(V,\beta)]^{\mathrm{Virt.}} \in H^{2v(g,n,V,\beta)}(M_{g,n}(V,\beta)\mathbb{Q})$

alg cycle 次元が正しい。 : virtual fundamental class,

これをかく これが わかれば…… あいまいな形で キレイにつくれる

$\boxed{C^V_{g,n,\beta} = \pi_*([M_{g,n}(V,\beta)]^{\mathrm{Virt}})}$

No. 9
Date.

$M_{g,n}(V,\beta) \xrightarrow{ev_i} V$

$(C,(x_1,\cdots,x_n),f) \longrightarrow f(x_i)$

$$\boxed{\int_{[M_{g,n}(V,\beta)]^{\mathrm{vir}}} ev_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup ev_n^*(\gamma_n) = \Phi^V_{g,n,\beta}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n)}$$

◎ Def : X: a proj. mfd. $\dim_{\mathbb{C}} X = 3$.

X: Calabi-Yau 3 fold

$\Longleftrightarrow$ (1) $K_X \simeq 1\!\!1_X$　　$K_X = \overset{3}{\wedge} T_X^*$

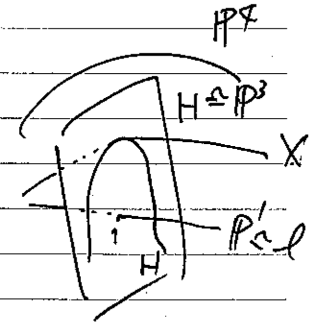
(2) $h^1(X,\mathcal{O}_X) = h^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$.　　(Torus は除く)

Example (キンニデラスた5次曲面) (CY 3fold)

$X = \{F(x_0,\cdots,x_4) = 0 \quad \text{hom. degree } 5\} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow X$: a C-Y 3fold

$H_2(X,\mathbb{Z}) \simeq H_2(\mathbb{P}^4,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[\ell]$



$g=0$. $n=3$. $\beta = d\cdot\ell$ $d \geq 0$

ライン

$\Phi^X_{0,3,d\ell}(H,H,H) =: \Phi_d(H,H,H)$

H:特別な GW-inv 係数の power series

◎ $\Phi^X_{A}(q) = H^3 + \sum_{d\geq 1} \Phi_d(HHH) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (q^d)^m\right)$

$H = H \cap X$

Aモデル？

=

No. 10

Date. · ·

つづき

$$\Phi_A^X(q) = H^3 + \sum_{d\geq 1} \Phi_d(HHH)\frac{q^d}{1-q^d}$$

$$n_d = \#\left\{ C \subset X \quad \text{degree } d \quad (C\cdot H = d),\ g(C)=0 \text{ なる curve} \right\}$$

d=3とかでも大変 数え方がわかっていない…

$$\Phi_d(HHH) = n_d \times (H\cdot dl)^3 = \underline{\underline{n_d \times d^3}}$$

- Candelas et al

Mirror symmetry を仮定し、全く別の方法で、

$\Phi_A^X(q)$ の q expansion

$$\Longrightarrow \quad n_0 = 5,\quad n_1 = 2875,\quad n_2 = 609250,\quad \vdots \quad n_{10} = \cdots$$

物理学者の方が数学より正しかった…。
数学者の計算はまちがっていた…。

数学は物理に頭があがらないらしいぞ。

$$\Phi_A^X(q) = n_0 + n_1 q + (2^3 n_2 + n_1)q^2 + \cdots$$

No. 1

Date. 2002 · 9 · 9

深谷 賢治 氏

概正則曲線. から HMS (ホモロジカルミラー) まで.

(M^{2n}, ω) : sym. mfd

$\Longleftrightarrow$ M 2n次元 C^∞-mfd

ω 2 form

$d\omega = 0$ $\quad$ $\omega^n \in \Lambda^{2n} M$ は決して0にならない。

$\Lambda^{2n}M$: M上の2n form

1950〜60ごろ…

<u>Darboux</u> 局所的に sym. geo は Trivial

$\forall (M, \omega)$ $\forall p \in M$ $\exists U_p$ nbd $V \subset \mathbb{C}^n$ $\quad z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$

$\varphi : U_p \cong V$ diff $\quad \varphi^* \omega_0 = \omega \quad \omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$

<u>Moser</u> Sym mfd の deformation theory はほとんど Trivial.

(M, ω_t) closed sym mfd, $\quad [\omega_t] \in H^2_{DR}(M;\mathbb{R})$ は t によらない

$\Rightarrow \exists \varphi_t : M \to M$ diffeo $\quad \varphi_t^* \omega_0 = \omega_t$

global な Sym str は あまりわかっておらん

1970年(ごろ)には まで open だった問

$(M, \omega_1), (M, \omega_2)$ $\quad \varphi : M \to M$ diffeo.

$[\varphi^* \omega_2] = [\omega_1] \in H^2(M)$

$\Longrightarrow \exists \varphi' : M \to M$ diffeo $\quad \varphi'^* \omega_2 = \omega_1$ か?

きほんてき問なのに…。

Gromov.

$M_1 = D^2(2) \times D^2(\frac{1}{2})$ $\qquad D^2(r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \}$

$M_2 = D^2(1) \times D^2(1)$ $\qquad \omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$

$\exists\ \varphi : M_1 \to M_2 \qquad \varphi^*(\omega_0 \wedge \omega_0) = \omega_0 \wedge \omega_0$

diffeo. $\varphi(z_1, z_2) = (\frac{1}{2} z, 2 z_2)$

しかし. $\varphi' : M_1 \to M_2$ diffeo $\varphi'^* \omega_1 = \omega_0$ は存在しない

$$D^2(2) \times D^2(1) \xrightarrow{\varphi'} D^2(1) \times D^2(1) = M_2$$

$\varphi'^* \omega_0 = \omega_0$ にならない.

$$\int_{M_1} (\varphi'^* \omega_0)^2 = 2 \neq \int_{M_2} \omega_0^2 = 1$$

- pseud-holomorphic curve (を使ってといた)

- Donaldson の Gauge theory inv.

$E \to M^4 + g$ ← metric

local に trivial

$(M, \omega) + J$ こういうものから出発する +α

↑ almost cpx str.

J : (M, ω) と compatible な almost cpx str

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J : TM \to TM \\ J^2 = -1 \\ \omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \\ \omega(X, JX) > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{g,m}(M, J, \beta) = \{ ((\Sigma, \vec{p}), \varphi) \} / \sim$$

$$\begin{cases} \Sigma : \text{genus } g \text{ semistable curve} \\ \vec{p} \subset \Sigma : m \text{ つの点} \\ \varphi : \Sigma \to M \\ \varphi_*([\Sigma]) = \beta \end{cases}$$

$d\varphi \cdot j = J \cdot d\varphi$ — nonlinear PDE

ω はでてこない。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = J(\varphi(s,t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \to \text{非線形.}$$

手動可能でない ホントにうごく。
が[illegible]にきくること

$$\mathcal{M}_{g,m}(M, J, \beta) \longrightarrow M^m \times M_{g,m}$$

M の m 来. $\qquad$ stable curve の moduli

$$[\mathcal{M}_{g,m}(M, J, \beta)] \in H_*(M^m \times \mathcal{M}_{g,m})$$

Fact このホモロジー類は ω で決まって J によらない!!

$\longrightarrow$ sym. str の inv. $\qquad$ ↑ "topological" のイミ

- **Gauge th. の inv.**

$E \to M$ $\xrightarrow{g:\text{metric}}$ nonlinear PDE → 解のモジュライ (解の数)

$\boxed{\text{「解の数」は } g \text{ によらない。}}$ → 4mfd の inv. <u>Donaldson inv</u>

- よい点：<u>線型の不変量</u>ではないものがみえる。それだけ深みがある。
  ↑ 特性類，コホモロジー
- わるい点：計算がむつかしい。

Mirror symmetry：これを mirror にもっていけば，"線形"のもので計算できる。

- **弱フロベニウス mfd**：今かってにつくった

X : mfd　T_pX 上の $\langle\, ,\rangle$
$T_pX \otimes T_pX \to T_pX$
$\langle ab, c\rangle = \pm\langle ca, b\rangle$　$a, b, c \in T_pX$.

(M, ω_0) : symplectic mfd.

$\mathrm{Sym}(M) = \{\omega \mid M$上の sym. st. ω_0に変形可能$\}/\sim$

$\omega \sim \omega' \iff \exists \varphi : M \to M$ diffeo $\begin{cases} \varphi^* \omega' = \omega \\ \varphi \sim id \text{ isotopic} \end{cases}$

$\pi : \mathrm{Sym}(M) \to H^2(M)$　(Moser ⇒ local diffeo
$\omega \mapsto [\omega]$

(単射ではないけどだいたいそんなもの。)

$U = \pi(\mathrm{Sym}(M)) \subset H^2(M, \mathbb{R})$

$U \times \dfrac{\sqrt{-1}\, H^2(M, \mathbb{R})}{\sqrt{-1}\, H^2(M, \mathbb{Z})} = \mathcal{M}_s(M) = X$

$T_pX = H^2(M : \mathbb{C})$　$\dim_{\mathbb{R}} M = 6$.

$a, b, c \in H^2(M, \mathbb{C})$　P.D H^2 a metric
$\langle ab, c\rangle = \int a \vee b \vee c$　$H^4 M \cong H^2 M$

Quantum cohomology $\overset{これ}{\Longrightarrow}$ 弱 Frobenius str + 量子コーカ
X に弱 F str を定める

$\dim M \neq 6$ のとき，　sym form の moduli
$TX = H^2(M)$ とするとまずい。
($H^2(M) \times H^2(M) \to H^4(M) \not\cong H^2(M)$
4+2=6

Xを大きくして $T\hat{X} = \oplus H^*(M)$)
extended moduli sp (何をパラメトライズしてるかわからない。いかがわしい。)

$(M^\vee, J)$: complex mfd　J: 本当に cpx str.

$\mathcal{M}_c(M^\vee)$: $M^\vee$ の cpx str の moduli

$T\mathcal{M}_c(M^\vee) = H^1_{\bar\partial}(M^\vee, TM)$　(CYから正しい。)

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ni a, b, c$

Yukawa coupling　$\langle ab.c\rangle = \int_{M^\vee} \overbrace{i_\Omega(a\wedge b\wedge c)}^{\Lambda^{03}} \wedge \overset{\Lambda^{30}}{\Omega} \in \mathbb{C}$　$a,b,c \in \Gamma(M^\vee, TM \otimes \Lambda^{01})$

$M^\vee$: CY　$c_1 M^\vee = 0$

$\Omega^1 M = K_{M^\vee} \simeq \mathbb{C}$　trivial bdl.

Ω をその断面.　$a\wedge b\wedge c \in \Gamma(M^\vee, K^*_{M^\vee} \otimes \Lambda^{03})$

$i_\Omega : K^*_{M^\vee} \otimes \Lambda^{03} \simeq \Lambda^{03}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_s(M) & & \mathcal{M}_c(M^\vee) \\ \| & & \| \\ X & & X^\vee \\ \text{弱Frob str.} & & \text{弱Frb.} \end{array}$$

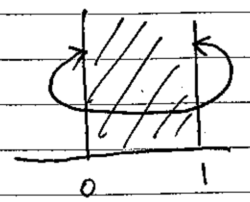
← 線型りろんのレベルで計算できる。

X は $X^\vee$ のある点 (max deg. pt) の近傍と同一視できて、Frob. str. もそこで一致。

例.　$M = T^2$　(T^2, ω)　$\int_{T^2} \omega = a > 0$

$\mathrm{Sym}(M) = \mathbb{R}_{>0}$　$CH^2(T^2) = \mathbb{R}$.

$\mathcal{M}_s(T^2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Im}}}{\mathbb{R}_{>0}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Re}}}{\dfrac{\sqrt{-1}\,\mathbb{R}}{\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}}}$

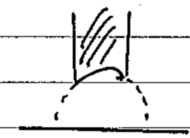


$\mathrm{Im}\, z > 0$

ミラー?

• $T^{2\vee} = T^2$

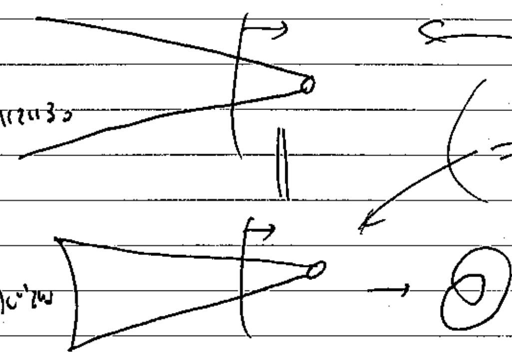
$\mathcal{M}_c(T^2)$



$\mathcal{M}_s$　開いている

$\|$

$\mathcal{M}_c$　閉じてる



maximal deg. pt.

(ミラーでもって、こっちをつかってこっちを計算)

• 5次曲面 etc.

GW inv. が Yukawa coupling に等しいことは示された。

けど本質的なふうがわかっていない。

物理屋のかんがえ (動機)

$$\begin{array}{ccc} M & & M^\vee \\ \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow \\ \text{場の理論} & = & \text{場の理論.} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{GW inv} & = & \text{Yukawa} \end{array}$$

むつかしい場の理論のところをとばしてしまってる

なっとくいく証明をしたい。

(ホモロジカルミラー sym.)

HMS

$$\begin{array}{ccc} M & & M^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \text{derived cat.} \\ \{\text{lag. submfd}\}_{+\alpha} & = & \{\text{Coh. sheaf}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{GW} & = & \text{Yukawa} \end{array}$$

(場の理論があれば空間の方はないでもよい、という思想。)

Complex mfd $M^\vee$

$\downarrow$

$M^\vee$ 上の Coherent sheaf の category

これがあれば空間があると思ってよい

No. 8

Date. . .

Open

$\{\mathcal{L}ag\} = \{coh\} \overset{?}{\Longleftrightarrow} GW = \text{Yukawa}$

Ideaはあるけど 証明はてない。

ジョーキョ証拠

Evidence: ① いくつかの situation で

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{L}ag) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Der}(coh)) \qquad (*)$$

② T^{2n} でチェックされている (cat. 同型).

③ SYZ の picture と話がある。
ストロミンジャー・ヤウ・ザスロフ

Brane の moduli / stability とは話がある。 (*)

④ 双方で parallel に 似た形の セイチ な構造がいろいろ作れる (自ゴゴ)

S-1

No. 1

Date. 2002 . 9 . 9

斎藤氏.

モノドロミー保存変形とフロベニウス構造. I

Intro のつづき.

- Gopakumar - Vafa - Formula (HST のせんでん)

Gromov - Witten inv. を D-brane を使って計算する。

X: CY 3-fold $\qquad \omega$: Kähler class

$\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$. $\qquad \boxed{N_g(\beta)} = [M_{g,0}(X, \beta)]^{virt} \in \mathbb{Q}$

G-W inv.

higher genus のときまとまれ……で 母関数をつくって……とおいて??? という方向もある。
KdV ?

- GK-V conj. $\quad {}^\exists n_h(\beta) \in \mathbb{Z}$

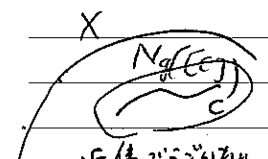
$$\sum N_g(\beta)\, q^\beta \lambda^{2g-2} = \sum_{\substack{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z}) \\ h \geq 0,\ k \geq 0}} \boxed{n_h(\beta)} \frac{1}{k} \left(2 \sin \frac{\lambda}{2}\right)^{2h-2} q^{k\beta}$$

GW の母関数みたいなもの。

$$q^\beta = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\omega, \beta))$$

(Fano の場合に拡張したのもある。)

Example $\quad X$: C-Y 3 fold.
$\cup$
C super rigid rat curve のつぎ?
うごかない。
$\wr$
$\mathbb{P}^1$ $\qquad N_{C/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$



近傍でうごかない。

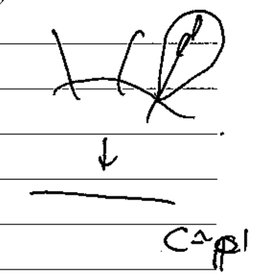
$[C] \in H_2(X, \mathbb{Z})$

おもむきがするのは他にあるかも。

$$N_g(C) = \Big[M_{g,0}(f : C' \to C)\Big]^{virt} \in \mathbb{Q}$$

degree 1 map

deg 1 map?



$C \simeq \mathbb{P}^1$

1つからだけのこい[illegible]をかんがえる

aut があるから分数?

Faber-Pand... 数学的に O.K.

$$\sum_{g \geq 0} N_g(C) \lambda^{2g-2} = \left(\frac{\sin(\frac{\lambda}{2})}{\lambda/2}\right)^{-2} = 1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\lambda^4}{240} + \frac{\lambda^6}{6048} + \cdots$$

No. 2
Date.

h: genus みたいなもの，

CY a rigid curve だと係数になる。

$N_g(C)$: $g=0$: 1. $g=1$, $\frac{1}{12}$, $g=2$: $\frac{1}{240}$ ...

予想： $n_0(C)=1$.

$$\sum_{g\geq 0} N_g(dC)\, \xi^d \lambda^{2g-2} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\left(2\sin\left(\frac{\lambda k}{2}\right)\right)^{-2} \xi^k \Rightarrow n_h(dC) = \begin{cases} 1 & h=0,\ d=1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

- Hosono - Saito - Takahashi I ← Physics → rat^l ell. surface の higher genus, β : とくべつ CK-V よそうから GW-inv を計算する。
  II ← Math

$n_k(\beta)$: X 上の staple pure sheaf of dim 1 の moduli と その cohomology の Relative Lefschetz action による $SL_2 \times SL_2$ action の分解を用いて定義した。

D-brane ⟷ = curve + その上の v.b. bdle. など？

X

dC multiple covering ... ???

D-brane moduli ⟷ pure sheaf の moduli ?

- Super rigid ratl curve / ell. curve ⇒ FP / β の結果と GV conj と compatible である。ことを示した。

⇒ Göttsche formula / Spin version で証明できる？

GW-inv は計算できることもある！

No. 3
Date.

§ WDVV 方程式.

$g=0$ の理論.

V : complex projective manifold.

$H^*(V,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k(V,\mathbb{Q})$ クラシカルなコホモロジー環.

$g=0$ G-W inv. へかける？ quantum cohomology.

つくりかた,

For simplicity. $H^*(V,\mathbb{Q}) = H^{even} \oplus H^{odd} = H^{even}$ $\left(H^{odd} = 0 \right.$

$H^*(V,\mathbb{Q}) = H^0 \oplus H^2 \oplus$ (rest ~~higher~~)

$\gamma_0 = 1$ $\quad \gamma_1, \cdots, \gamma_p$ $\quad \gamma_{p+1}, \cdots, \gamma_N$

$H^*(V,\mathbb{C})$: $g_{ij} = \int_V \gamma_i \wedge \gamma_j$ cup積 : metric といわれる。

degree があっていないところは zero とする。全体で非退化。

$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$

$X = \Delta \hookrightarrow X\times X$ $\quad [\Delta] = \sum g^{ef} \gamma_e \otimes \gamma_f$ $\quad \gamma_e, \gamma_f \in H^*(V,\mathbb{Q})$

$\gamma = \sum y_i \gamma_i$ $\quad y_i$: variable $\quad 0 \leq i \leq N$

$I_\beta(T_1,\cdots,T_n) := \Phi^V_{0,n,\beta}(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ $\quad T_i \in H^*(V,\mathbb{Q})$

$$\boxed{\Phi(y_0, y_1, \cdots, y_N) = \bigoplus_{n_0+n_1+\cdots+n_N \geq 3} \sum_{\beta\in H_2(V,\mathbb{Z})} I_\beta(\gamma_0^{n_0}, \cdots, \gamma_N^{n_N}) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \cdots \frac{y_N^{n_N}}{n_N!}}$$

$\Phi \in \mathbb{Q}[[y_0, y_1, \cdots, y_N]]$, $\quad I_\beta(\cdots) \in H^*(M_{0,n},\mathbb{Q})$

- Structure const.

$\Phi_{ijk} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k}$: i,j,k について symmetric.

つづく

No. 4

Date.

☆ $H^*(V,\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[[y_0,\cdots,y_N]]$ ← multiplication $*$ を入れる

$$\gamma_i * \gamma_j := \sum_{e,f} \Phi_{ije}(y)\, g^{ef}\gamma_f$$

$\gamma_0 = 1.$ $\quad \boxed{\gamma_0} * \gamma_i = \sum_{e,f} \Phi_{0ie}\, g^{ef}\gamma_f$

$$\left(\Phi_{0je} = I_0(\gamma_0,\gamma_j,\gamma_e) = \int_X \gamma_j \wedge \gamma_e = g_{je}\right)$$

$$= \sum_{e,f} g_{ie}\, g^{ef}\gamma_f = \sum_f \delta_i^f \gamma_f = \gamma_i$$

(1) γ_0 は unit.

(2) $\gamma_i * \gamma_j = \gamma_j * \gamma_i$ (commutative)

(3) WDVV

$*$ は結合法則をみたす。

$$(\gamma_i * \gamma_j) * \gamma_k = \gamma_i * (\gamma_j * \gamma_k)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{e,f} \Phi_{ije}\, g^{ef}\, \Phi_{fkl} = \sum_{e,f} \Phi_{jke}\, g^{ef}\, \Phi_{ifl}$$

逆にこのPDEの解としてGWinvから決まる形式的級数 Φ があるということ。

PDE $\quad \boxed{\sum_{e,f} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_e} g^{ef} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_f \partial y_k \partial y_l} = \sum_{e,f} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_j \partial y_k \partial y_e} g^{ef} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_f \partial y_l}}$

Φ 自身がみたいなもん。

この構成 $(H^*(V,\mathbb{Q})[[y_0\cdots y_N]], *)$: ass. comm. ring

量子コホモロジー環

WDVV は Gromov-Witten の定義 + $M_{0,n}$ のcohomologyの関係から証明される。

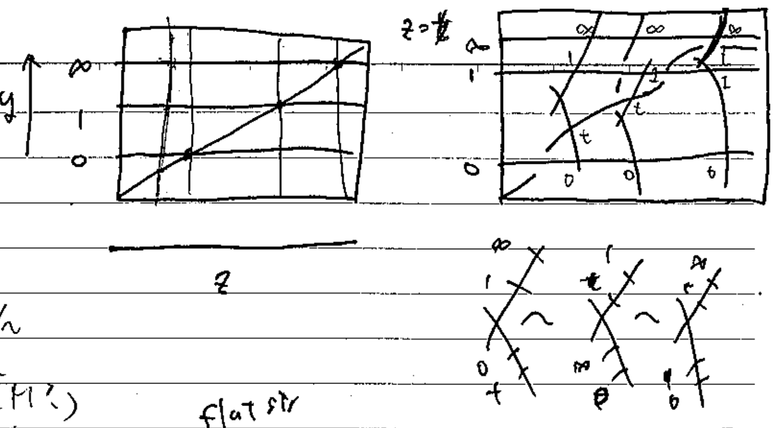
もとのコホモロジーの変形

No. 5

Date.

$$M_{0,5} \to M_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1$$

$M_{0,4} = \{C : \text{genus } 0,\ \{x_1,\cdots,x_4\}\}/\sim$



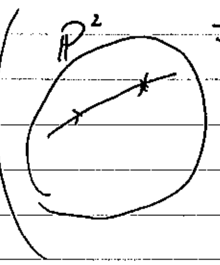
例1

M (Spec M? の例) = $(H^*(V,\mathbb{C})[[y_0,\cdots,y_N]], *)$ ↔ flat str 90年前後 (バルチェフ)

WDVV + いくつかの初期条件

⇓

GW $\Phi^V_{0,n,\beta}$ が回復できる場合がある。



この種の情報 ??

genus 0のとき WDVVは強力!!

「$V=\mathbb{P}^2$, WDVV をみたす構造はどれくらいあるか?」

Dubrovin の問題意識

G-W ↕ おどろき!

● Frobenius mfd (structure) ⇐ ひながた (Isolated hypersurface singularity の universal unfolding space のうえに Flat structure を導入した Saito Kyoji Theory)

{universal な摂動. period の理論をかいてないたい。→ root 系のことばでかける。→ バイバミルトニアンとほぼパラレル ↖ Dubaの}

M: cpx analitic mfd.

TM: Tangent bundle

(ランダウ・ギンツブルグ model GW を計算, など…)

(1) $*$: $TM\otimes TM \to TM$ bundle map,

$\partial_1 \otimes \partial_2 \mapsto \partial_1 * \partial_2$: (commutative, associative)

(2) g: $TM\otimes TM \to \mathcal{O}_M^{hol}$: a symetric nondeg.

$\partial_1 \otimes \partial_2 \mapsto g(\partial_1,\partial_2)$

flat bilinearform

$g = \sum (g_{ij})\, dz^i \otimes dz^j$ $\quad g_{ij}$: constant

Levi-Civita ∇

$\nabla^2 = 0$

(3) $e : M \to TM$ hol. section
e: vector field $\quad {}^{\forall}\partial$: vector field
$\partial * e = \partial$

(4) $\mathcal{E} : M \to TM$ a vect. field
s.t. (a) ∇ : g の Levi Civita conn $\quad \nabla e = 0$

potential? (b) $C(\partial_1 \partial_2 \partial_3) := g(\partial_1 * \partial_2 . \partial_3)$

$\nabla_{\partial_1} C(\partial_2 \partial_3 \partial_4)$ ~~は~~ $\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_4$ に関して symmetric

(c) (c-1) $\nabla \mathcal{E}$: End (T_M) の holizontal section

$L_\mathcal{E}$: Lie derivative (c-2) $\exists D \in \mathbb{Q}$ $\quad L_\mathcal{E}(g(\xi.\eta)) - g(L_\mathcal{E}\xi.\eta) - g(\xi.L_\mathcal{E}\eta) = Dg(\xi.\eta)$

(c-3) $L_\mathcal{E}(\xi * \eta) - L_\mathcal{E}\xi * \eta - \xi * L_\mathcal{E}\eta = \xi * \eta$

$x \in M$

$* : T_xM \otimes T_xM \to T_xM$

$(T_xM, *)$ commutative
associative
unitary

(b) $\Rightarrow \exists F$

$C(\partial_1 . \partial_2 . \partial_3) = \partial_1 \partial_2 \partial_3 F$
$\shortparallel$
$g(\partial_1 * \partial_2 . \partial_3)$

($x \in M$ をうごかしたとき …… というのをつぎたやる)

例 まとうこいじんへ----- (森の数学へのコメント)

変形されたもの。

オマケ
・ $R = H^*(V.\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}[[y_0, \cdots, y_N]] \hookleftarrow \mathbb{C}[y_0, \cdots, y_N]$

$(\bigcirc . \circledast)$ $(H^*(V.\mathbb{Q}). *)$ $\quad H^*(V.\mathbb{C}) \times M \simeq TM$.
$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$
$y \qquad 0 \in \operatorname{spec} \mathbb{C}[[y_0 \cdots y_N]] = M$.

$y_0 = \cdots = y_N = 0$
にするとふつうの cup 積。

・ $H^0(V.\mathbb{C}) \ni 1$
degree
$\deg t_0 = 1$

p 次 form $\quad \deg$ は $1 - \delta - p$.

・ CY にならないと cup 積はでてこない。(deg を super mfd にしないと ...)

F-1

No. 1

Date. 2002・9・9　深谷氏

D-ブレーンの数学 I

◎ **Brane**

$\mathcal{M}(E) \hookrightarrow \mathcal{M}(M:E) \to \mathcal{M}_c(M^V)$

$E \to M^V$ cpx vct. bdl.　　$M = \cup U_i$

$\mathcal{E}$: hol str.　　$a_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl(m, \mathbb{C})$ hols.

$\bar\partial_E : E \otimes \Lambda^{0,k} \to E \otimes \Lambda^{0,k+1}$　$\bar\partial_E^2 = 0$

$\mathcal{M}(M^V, E) = \{ (J, \mathcal{E}) \mid J : M^V \text{ の cpx},\ \mathcal{E} \to (M^V, J) \text{ hol. str} \} / \sim$

Mを止めてブレインを動かす.

$T\mathcal{M}(E) \to T\mathcal{M}(M^V, E) \to T\mathcal{M}_c(M^V)$

ここに積がはいるかは分からない。

$\| \qquad\qquad \|$ K.S.

B model $H^1_{\bar\partial}(M, \mathrm{End}(E))$ ← 積　　$H^1_{\bar\partial}(M^V, TM)$

α, β, γ　noncomm.　　Yukawa coupling : comm

積: $H^k(M, \mathrm{End}(E)) \otimes H^\ell(M, \mathrm{End}(E)) \to H^{k+\ell}(M, \mathrm{End}(E))$

$\langle \alpha\beta, \gamma \rangle = \int \mathrm{Tr}(\alpha \circ \beta \circ \gamma) \wedge \Omega^2 \in K$

$\alpha\beta \neq \beta\alpha$

• $\mathcal{M}(E)$ の moduli の局所構造 $\Longleftrightarrow$ $T\mathcal{M}(E)$ の積構造.

statement.

$$\begin{cases} C^k = \Gamma(M^V, \mathrm{End}(E) \otimes \Lambda^{0,k}) \\ \bar\partial : C^k \to C^{k+1} \\ \wedge : (\mathrm{End}(E) \otimes \Lambda^{0,k}) \otimes (\mathrm{End}(E) \otimes \Lambda^{0,\ell}) \to \mathrm{End}\, E \otimes \Lambda^{0,k+\ell} \end{cases}$$

合成　wedge

$(C^k, \bar\partial, \wedge)$ は Differential graded alg. (DGA)

No. 2

Date.

$$\begin{cases} \bar\partial(u \wedge v) = \bar\partial u \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge \bar\partial v \\ \bar\partial^2 = 0 \end{cases}$$

DGA $\rightsquigarrow$ MC-stack $\mathcal{M}(C)$

モーラ・カルタン

(この例では $\mathcal{M}(C)$ は $\mathcal{M}(E)$ のある点の近傍)。

☆ $C \rightsquigarrow D = H^*(C, \partial)$ 上の A_∞-alg　　生きのこる $m_2, m_3, \ldots$　m_2: 積.

• $\mathcal{M}(C)$ の定義方程式の k 次の項 $\longleftrightarrow$ A_∞-alg. の k 次の部分の構造定数

cpx str めときは zero → moduli sp は smooth (def eq. がない)

• D は C の homotopy 型の不変量 (up. to isom)

(★) b. bdl の モジュライ

このちがいを無視する.

二つちがいの Fib. str に分ける のはない.

可換分かれでないかもしれない。

全体.

☆ Cpx str の moduli　　M: C-Y mfd.

C: Differential Lie alg.

$C^k = \Gamma(M, TM \otimes \Lambda^{0,k})$　　$(C^k, c, J, \bar\partial)$

$[\cdot,\cdot]$　$\wedge$.

本当の Frobenis str

cpx. str.　formality.　homotopy equiv. h.e　$H^*(C, \bar\partial)$ すべての積が zero

GW, Yukawa は secondary なものとしてでる.

$\wr$ Secondary なものとしてでる → G.W. Yukawa.

[illegible]：[illegible]…

(III) $\mathbb{Q}$-homotopy theory (Griffith.-Morgan Prog. Math. 16.)

X. Y. space. $\pi_1 X = \pi_1 Y = 1$.

<u>Def</u>. X と Y は $\mathbb{Q}$ hom. eq.

$\Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ conti s.t. $f_\# : H(X;\mathbb{Q}) \simeq H(Y.\mathbb{Q})$

<u>Th</u> (Quillen or Salivan)

M. N C^∞-mfd.
$(\Lambda^* M.\ d.\ \wedge)$ DGA
$(\Lambda^* N.\ d.\ \wedge)$ 〃

「$M \sim N$ $\mathbb{Q}$ hom eg.」
$\Updownarrow$
「$\Lambda^* M \sim \Lambda^* N$ hom. equiv.」

C. C' : DGA　　　d と $\wedge$ を保つ.
$C \sim C'$ hom. equiv.
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists C''$, DGA　$\varphi : C'' \to C$　d g hom
　　　　　　　　　　$\varphi' : C'' \to C'$

s.t. $\varphi_\# : H(C''.\mathbb{Q}) \simeq H(C:\mathbb{Q})$
　　$\varphi'_\# : H(C''.\mathbb{Q}) \simeq H(C'':\mathbb{Q})$

これの [illegible] なのをやりたいらしいぞ。

$E \to M$ flat bdl. $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$: flat.

d^∇ : $\mathrm{End}(E) \otimes \Lambda^k \to \mathrm{End}(E) \otimes \Lambda^{k+1}$
$\wedge$:

$C^k = \Gamma(\mathrm{End}(E) \otimes \Lambda^k)$
DGA.

<u>Thm</u> (Goldman - Milson?)

$C(E_1, d^{\nabla_1}) \sim C(E_2 . d^{\nabla_2})$ homotopy equiv.

$\Rightarrow$ $R(E)$ の E_1 の nbd $\simeq$ $R(E)$ の E_2 の nbd.

moduli は local に (?) 存在

$R(E)$: flat bdl の moduli　$E = M \times \mathbb{R}^n$　$\mathrm{Hom}(\pi_1 M. Gl(n.\mathbb{C}))/\widetilde{\mathrm{conj}}$

$\mathcal{E} \longrightarrow M^\nu$

hols.　　cpx mfd.

$C^k(\mathcal{E}) = \Gamma(M^\nu, \mathrm{End}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda^{0,k})$
$\bar\partial_{\mathcal{E}_1}$ $\wedge$ DGA.

<u>Thm</u> $C(\mathcal{E}_1) \sim C(\mathcal{E}_2)$ hom. equiv.

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}(E)$ の $\mathcal{E}_1$ の nbd $\simeq$ $\mathcal{M}(E)$ の $\mathcal{E}_2$ の nbd.

$(C.\ \wedge.\ d)$ DGA.

$\widetilde{\mathcal{M}}(C) = \{ b \in C' \mid db + b \wedge b = 0 \}$

~~$C = C(\mathcal{E})$~~　　$b \in \Gamma(M^\nu, \mathrm{End}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda^{0,1})$

$b : \mathcal{E} \otimes \Lambda^{0,k} \to \mathcal{E} \otimes \Lambda^{0,k+1}$

$\bar\partial + b = \bar\partial_b$

・ $\bar\partial_b$ は $\mathcal{E}$ に新しい hol str を決める
$\Leftrightarrow \bar\partial_b^2 = 0 \Leftrightarrow \bar\partial b + b \wedge b = 0$

$\widetilde{\mathcal{M}}(C)/\sim\ = \mathcal{M}(C)$　　$\sim$ の def はあとで.

~のdef exampleのときは、

$g : E \to E$ 同型

$(\bar{\partial}+b)\, g = g\, (\bar{\partial}+b') \Longleftrightarrow b \sim b'$

A_∞-alg に一般化する。

(C, m_k) : A_∞-alg. C graded vector sp.

$C[1]^k = C^{k+1}$

- $m_k : \underbrace{C[1]\otimes\cdots\otimes C[1]}_{k} \to C[1]$ degree 1.

- A_∞-relation

$BC[1] = \bigoplus_k \overbrace{C[1]\otimes\cdots\otimes C[1]}^{k\text{コ}} = \bigoplus_k B_k C[1]$

は coalgebra.

def : D は coalg $\Delta : D \to D\times D$ degree 0.
$(\Delta\otimes 1)\circ\Delta = (1\otimes\Delta)\circ\Delta$

$\Delta(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) := \sum_i (x_1\otimes\cdots\otimes x_i)\otimes(x_{i+1}\otimes\cdots\otimes x_n)$

- Coderivation : $\hat{d} : D \to D$ deg $=1$.

$\Longleftrightarrow \Delta\circ\hat{d} = (\hat{d}\otimes 1 + 1\otimes\hat{d})\circ\Delta$

$\alpha_k : B_k C[1] \to C[1]$ degree 1 に対して

Lemma $\exists!\, \hat{\alpha} : BC[1]$ 上 coderivation その $B_k C[1] \to BC[1]$ 成分は α_k （$\to C[1]$）

Coderiv?: $\hat{\alpha}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = \sum \pm x_1 \cdots \otimes \alpha_k(x\cdots x)\otimes\cdots\otimes x_n$

- A_∞-rel. $m_k : B_k C[1] \to C[1]$

Lemma $\Rightarrow \hat{d} : BC[1] \to BC[1]$ coderivation.

m_k は A_∞-alg $\Longleftrightarrow \hat{d}\hat{d} = 0$.

$(C, \wedge, d)$: DGA
$\begin{cases} m_1 = \pm d \\ m_2 = \pm\wedge \\ m_3 = m_4 = \cdots = 0 \end{cases}$ A_∞-alg

- A_∞-homomorphism.

Lemma. $\forall k$ $\varphi_k : B_k C[1] \to C'[1]$ deg 0
$\Rightarrow \exists!\, \hat{\varphi} : BC[1] \to BC'[1]$ coalg. hom.
成分 φ_k が $B_k \to B_1$.

$\because)$ $\hat{\varphi}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = \sum \varphi(x\cdots x)\otimes\varphi(x\cdots x)\otimes\cdots\otimes\varphi(x\cdots x)$,,
といういみでまとめる

Def : $\varphi_k : B_k C[1] \to C'[1]$ A_∞-hom. $(k=1,\ldots,\infty)$
$\Longleftrightarrow \hat{\varphi}\circ\hat{d} = \hat{d}\circ\hat{\varphi}$

（合成 $\hat{\varphi}\circ\hat{\varphi}' = \widehat{\varphi\circ\varphi'}$
$\varphi_k(\varphi'_{k_1}\otimes\cdots\otimes\varphi'_{k_k}) = (\varphi\circ\varphi')_{k_1\cdots k_k}$）

$\{A^\infty$-alg, A^∞-hom.$\} \longrightarrow$ homotopy

DGAでの~のdef では扱えないことは A^∞でやらないとうまくいく

「 $C \to C'$ A_∞-hom. $\varphi\sim\varphi'$ homotopic とは？」

Poly$([0,1], C)$ A_∞-alg.

$\mathrm{Poly}([0,1], C)^k = \left\{ a(t) + b(t)\,dt \;\middle|\; \begin{array}{l} a(t)\in C^k\otimes Q(t) \\ b(t)\in C^{k-1}\otimes Q(t) \end{array} \right\}$

$m_1(a(t) + b(t)\,dt) = (m_1 a)(t) + \left((-1)^{\deg a+1}\frac{da}{dt} + (m_1 b)(t)\right) dt$ つづく

No. 7
Date.

$m_k(a_1+b_1dt, \cdots, a_k+b_kdt)$

$= m_k(a_1, \cdots, a_k) + \sum_i \pm m_k(a_1 \cdots a_{i-1}\, b_i\, a_{i+1} \cdots a_k)\, dt$

$C = \Lambda(M)$ $\qquad \mathrm{Poly}([0,1], C) \doteqdot \Lambda(M \times [0,1])$

$\mathrm{Eval}_s : \mathrm{Poly}([0,1], C) \longrightarrow C \qquad A_\infty\text{-hom}.$

$$\begin{cases} \mathrm{Eval}_{s,1}(a(t) + b(t)dt) = a(s) \\ \mathrm{Eval}_{s,2} = \cdots = 0 \end{cases}$$

Def : $\left.\begin{array}{l} \varphi : C \to C' \\ \varphi' : C \to C' \end{array}\right\} A_\infty\text{-hom}.$

$\varphi \sim \varphi'$: homotopic $\iff \exists H : C \to \mathrm{Poly}([0,1], C')$ A^∞-hom

$$\begin{tikzcd} & & C' \\ C \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[r, "H"] \arrow[drr, "\varphi'"'] & C' \times [0,1] \arrow[ur, "s=1"] \arrow[dr, "s=0"'] & \\ & & C' \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Eval} \circ H = \varphi' \\ \mathrm{Eval} \circ H = \varphi \end{cases}$$

たこう(はどうちでの気がする –

<u>Thm</u> $\varphi \sim \varphi',\ \varphi' \sim \varphi'' \Rightarrow \varphi \sim \varphi'$

<u>Thm</u>. $\varphi : C \to C'$ A_∞-hom. $\varphi_\# : H(C, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} H(C', \mathfrak{m})$

$\Rightarrow \exists \varphi' : C' \to C$ A_∞-hom $\begin{cases} \varphi' \cdot \varphi \sim \mathrm{id} \\ \varphi \cdot \varphi' \sim \mathrm{id} \end{cases}$

(Rem
DGA ではなりたたない)

No. 8
Date.

◎ モラ・カルタン

(C, m_k) A_∞-alg.

$\tilde{\mathcal{M}}(C)$ "=" $\{ b \in C' \mid \underbrace{\sum_k}_{\leftarrow \text{ここ}} m_k(b \cdots b) = 0 \}$

C : DGA $\quad db + b \wedge b = 0$

"=" の例: $\sum_k \underbrace{m_k(b \cdots b)}_{\text{無限の}} = 0$ の存在はわからない。

解1) 収束べき級数でやる。

◎ 解2) 形式的べき級数でやる。

R : 局所 Artin 環 $\qquad$ 例,
・$R = \mathbb{Q}[T_1, \cdots, T_n]/(P_1 \cdots P_\ell)$
$P_1 \cdots P_\ell$ の共通の零点は 0 のみ.

・$R = \mathbb{Q}[T]/(T^{n+1})$ (*)

$\hat{\mathcal{M}}(C)(R) = \left\{ b \in C' \otimes_{\mathbb{Q}} R \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum m_k(b \cdots b) = 0 \\ b \equiv 0 \mod \mathfrak{m} \end{array} \right\}$ $\mathfrak{m}$ は R の極大イデアル.

(*)のとき, $b = Tb_1 + \cdots + T^n b_n$

$\underbrace{\sum_k^n m_k(b \cdots b)}_{\text{有限和}} \equiv 0 \ (T^{n+1})$

・$R \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}(C)(R)$
Functor となる

次は $\hat{\ }$ をとる

No. 9
Date. . .

Def $b, b' \in \hat{\mathcal{M}}(C)(R)$

$b \sim b' \iff \exists \tilde{b} \in \hat{\mathcal{M}}(\mathrm{Poly}([0,1], C))(R)$ s.t. $\begin{cases} Ev_1 \tilde{b} = b' \\ Ev_0 \tilde{b} = b \end{cases}$

$$\begin{matrix} & b' \\ \tilde{b} & \| \ C \times [0,1] \\ & b \end{matrix}$$

$\tilde{b} = b(t) + c(t)\,dt$

$b(0) = b, \quad b(1) = b'$

$$\frac{db}{dt} + \sum_{k,i} \pm m_k(b \cdots b) = 0$$

DGA $\quad \frac{db}{dt} \pm c \wedge b \pm b \wedge c = 0$

$\exp(\int c) = g$

$(d+b')g = g(d+b)$

- Maurer-Cartan ~~stack~~ Functor.

$R \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}(C)(R)/\sim$ ← ゲージ同値.

シュレジンガー

{Artin ring} $\longrightarrow$ {sets}

groupoid ?

Thm. C と C' が homotopy eq.

$\Rightarrow \mathcal{M}(C)(R) \simeq \mathcal{M}(C')(R)$

① $\varphi : C \to C'$ A_∞-hom

$\Rightarrow \hat{\mathcal{M}}(C)(R) \to \hat{\mathcal{M}}(C')(R)$

$b \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(b \cdots b)$

$\varphi_*(b)$

② $\varphi \sim \varphi'$

$\Rightarrow \varphi_*(b) \sim \varphi'_*(b)$

(by def.)

F-2

No. 10
Date. 2002. 9. 10

深谷氏

Dーブレーンの数学 II

- Monodromy の対応

Ref

Seidel - Thomas math/0001043
Seidel - Khuvanov
Aspinwall hep-th/0102198
Seidel JDG.

M : sym mfd

mirror. $M^\vee$: complex mfd

/弱め.
=の対称のハズ

- Mの対称性 $= \{ f : M \to M \mid f^{\#}\omega = \omega \}$

$\cap \ \not\parallel$

Lag M カテゴリーの対称性 $\boxed{\text{HMS}}$の帰結.

- $M^\vee$の対称性 $= \{ f : M^\vee \to M^\vee \mid \text{bihol} \}$

$\cap \#$

$DM^\vee$ sheaf の cat の derived cat の対称性.

(Fourier Mukai 変. ∈ {f: M^∨→M^∨ bihol})

☆ Mの Symplectic diffeo

$\Updownarrow$

$M^\vee$の Fourier - 向井 変換 ($D(M^\vee)$の自己同型)

$f : M \to M$: sym. diffeo.

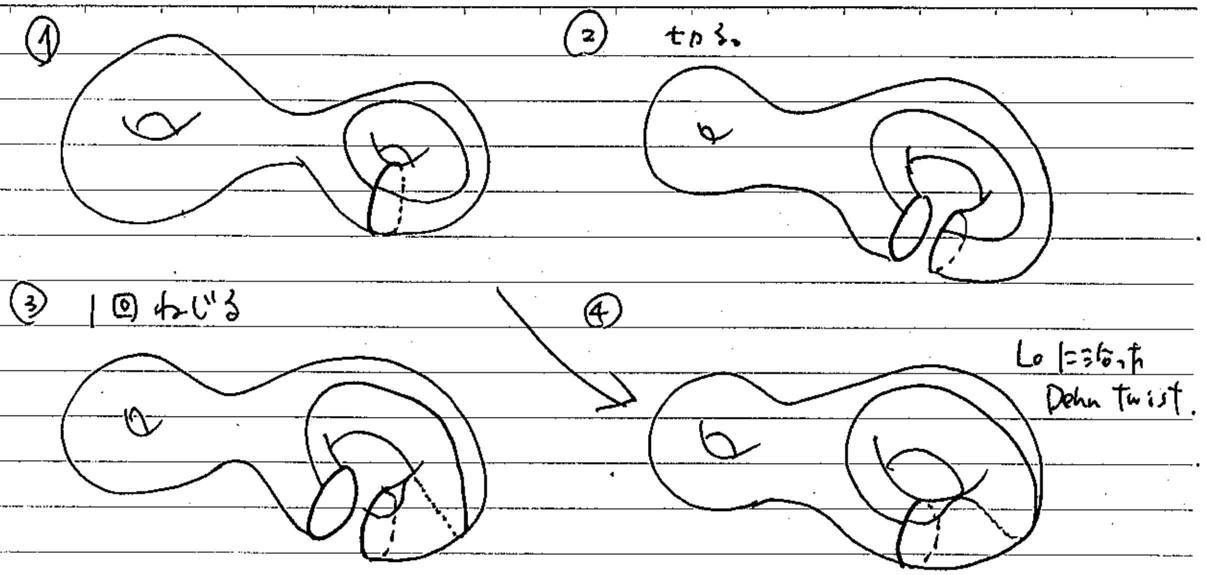
Dehn twist

$M = \Sigma$: リーマン面 $\quad$ cpx str は忘れる?

$S^1 \subset M$

つづく

① ② 切る。 ③ 1回ねじる ④ L_0 にそった Dehn twist.



$f_{L_0} : \Sigma \to \Sigma$ symplectic diffeo $(f_{L_0}^* \omega = \omega)$

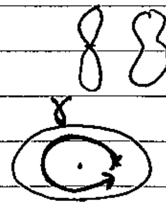
- $\alpha \in H_1 \Sigma$

$$f_{L_0 *}(\alpha) = \alpha - (L_0 \cdot \alpha) L_0$$

- $f_{L_0} = id$ L_0 の small nbd.

M: Kähler

M_t : $t \in D(\varepsilon) \setminus 0$
M_0 : singular

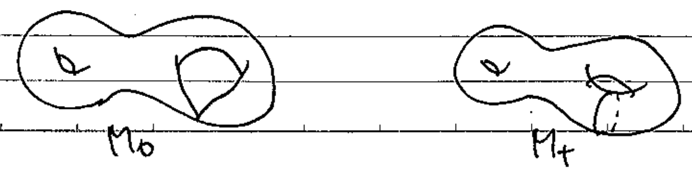


$t \to 0$

$M_t \longrightarrow M_0$

M_t の中の Lagrangian S^n が 1点につぶれる。

$L_0 = S^n \subset M^{2n}$ $\quad \omega|_{L_0} = 0$



$f_{L_0} : M \to M$ Sym. diffeo.

$\bigcup M_t \times \{t\} \longrightarrow D^2 \setminus 0$ の monodromy

(☆) $\alpha \in H_n(M)$

$f_{L_0}(\alpha) = \alpha - \langle L_0, \alpha \rangle L_0$ ピカール・レフシェッツ

(☆☆) f_{L_0} は L_0 の nbd の外で identity,

◎ 一般に.
M^{2n} : symplectic mfd.
$L_0 = S^n \subset M^{2n}$ Lag. sm.f.
$\Rightarrow$ $f_{L_0} : M \to M$ symplectic diffeo
(☆), (☆☆) をみたすものがある。

Rem $n =$ even

$[L_0] \cdot [L_0] = 2$.

L_0 の nbd $\simeq T^* S^n$ の 0 nbd.

$[L_0] \cdot [L_0] = T^* S^n$ での 0 sect と自分自身の交点数 $= 2$

$f_{L_0 *}$

$L_0 \longmapsto -L_0$

$\alpha \cap L_0 = 0$ のとき

$\alpha \longmapsto \alpha$

$f_{L_0 *} : H_n \to H_n$ は L_0 に直交する超平面に対する reflection

$L_i \subset M$ $\quad L_i \simeq S^n \subset M$

f_{L_i} : reflection

Date.

$\rightsquigarrow$ braid gp.

$f_{L_{i\,k}}$: ~~[illegible]~~ もち? は H_n 上に reflection group.

L_1, L_2, 1

- (ゴマカシ) Theorem　　statementはたいへんなので ゴマカシでいる

$L_0 = S^n \subset M$

$f_{L_0} : M \to M$

$L_1 . L_2 \subset M$: Lag. smf.

$$\begin{array}{ccc} HF(L_0.L_1)\otimes HF(L_2.L_0) & \longrightarrow & HF(L_2,L_1) \\ & {}_{-1}\nwarrow \quad \swarrow & \\ & HF(L_2.f_{L_0}(L_1)) & \end{array}$$

フレアホモロジー　　exact triangle.

なる long. exact seq がある。

示せているもの

M

$L_0 . L_1 . L_2$: exact.　← closed ならなおよい. 取り込んでない.

しかし $\omega_i = d\theta$　0-1 form

$\theta|_{L_i} = df_i$　f_i : f.c.n.

---

exact triangleをわかりやすくしたい

Floer homology

M : symplectic mfd.

$L_a . L_b \subset M$: lag sm.f.

$L_a \pitchfork L_b$

$$CF(L_a.L_b) \simeq \bigoplus_{p\in L_a\cap L_b} \mathbb{Z}[p]$$

Date.

Maslov index

$\mu(p) \in \mathbb{Z}$

$$CF_k^{\cdot} = \bigoplus_{p,\ \mu(p)=k} \mathbb{Z}[p] .\qquad \partial : CF_k^{\cdot} \to CF_{k-1}^{\cdot}$$

D^2からのJ holo map.

$\partial^2 = 0$

$$HF_k(L_a.L_b) = \ker\partial / \operatorname{Im}\partial$$

- mapping cone,

$(C^1_*.\partial)$, (C^2_*,∂) > chain cpx.

$\varphi : C_k^1 \to C_k^2$ chain map.　$\partial\varphi = \varphi\partial$

$$\operatorname{Cone}(\varphi)_k = C_{k-1}^1 \oplus C_k^2$$

$\circlearrowright\partial$

$$\partial(\alpha.\beta) = (\partial\alpha.\ (-1)^{\deg\alpha}\varphi(\alpha)\in\partial\beta) \Leftarrow$$ ↑たらずして違ないかず

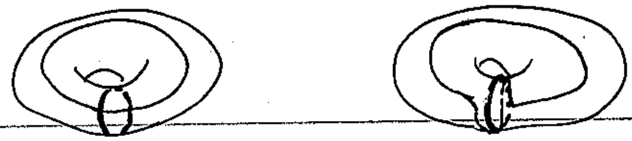
$$C^2 \longrightarrow \operatorname{Cone}(\varphi) \longrightarrow C^1[-1]$$

$C_*^2 \hookrightarrow 0\oplus C_k^2$　　C_{k-1}^1

$C_k^1\oplus$.

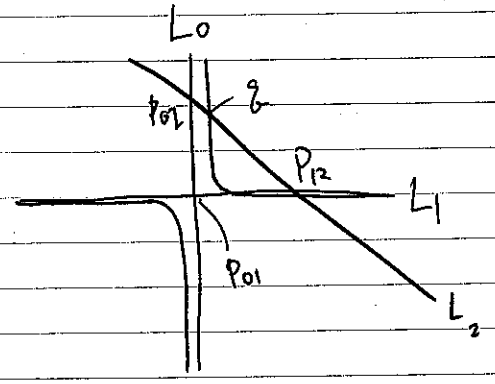
$$\begin{array}{ccc} H_*(C^1) & \longrightarrow & H_*(C^2) \\ {}_{-1}\nwarrow & \circlearrowright & \swarrow \\ & H_*(\operatorname{Cone}\varphi) & \end{array}$$

exact triangle

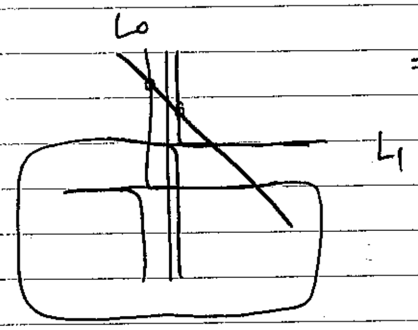


$$\begin{tikzcd} HF(L_0, L_1) \otimes HF(L_2, L_0) \arrow[rr] & & HF(L_2, L_1) \arrow[dl] \\ & HF(L_2, f_{L_0}(L_1)) \arrow[ul, "-1"] & \end{tikzcd}$$

$L_2 \cap f_{L_0}(L_1)$



$$\boxed{\underline{L_2} \cap \underline{f_{L_0}(L_1)} = \underset{p_{12}}{L_2 \cap L_1} \cup \underset{P_{02}}{(L_2 \cap L_0)} \times \underset{P_{01}}{(L_0 \cap L_1)}}$$



$\# L_0 \cap L_1 = 2 \quad \# L_0 \cap L_2 = 1$

- $CF(L_2, f_{L_0}(L_1)) = CF(L_2, L_1) \oplus (CF(L_2, L_0) \otimes CF(L_0, L_2))$

($CF(L_2, f_{L_0}(L_1))$ は $CF(L_2, L_0) \otimes CF(L_0 L_1) \to CF(L_2, L_1)$
なる chain map の mapping cone であることを示さないといけない (大変))

__Rem.__ Gauge theory に origin がある。

Floer の Triangle

M homology 3 sphere
$K \subset M$ knot.

M_{-1} K にそって -1 Dehn surgery : homology sphere
M_0 $\quad 0 \quad$ 〃 $\quad$ homology $S^1 \times S^2$

$$\begin{tikzcd} HF(M) \arrow[rr] & & HF(M_{-1}) \arrow[dl] \\ & HF(M_0) \arrow[ul, "-1"] & \end{tikzcd}$$

シンプレクティックバージョンができます。

---

mirror
f_{L_0} $\quad M$ の symplectic diffeo.
$f_{L_0}^{\vee}$ $\quad M^{\vee}$ cpx mfd

$D(M)$ の 自己同型.

$M^{\vee}$ complex mfd.

$\mathcal{F}^{\cdot}$

$\mathcal{F}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^2 \to \cdots$

$M^{\vee}$ の 連接 $\mathcal{O}_{M^{\vee}}$ module sheaf の chain complex.

$\varphi : \mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{G}^{\cdot}$: chain map

$\varphi_k : \mathcal{F}^k \to \mathcal{G}^k \qquad d\varphi_k = \varphi_{k+1} d.$

- φ が weak equiv.

$\varphi_* : \dfrac{\operatorname{Ker} d}{\operatorname{Im} d} \to \dfrac{\operatorname{Ker} d}{\operatorname{Im} d}$ が同型.

$\mathcal{F}^\cdot \sim' \mathcal{G}^\cdot \iff$ weak equiv がある　：同値関係でない。

・ $\sim'$ の生成する同値関係
$\sim$ の同値類
$\mathbb{D}(M^\vee)$ の object.

☆ $\mathbb{D}(M^\vee)$ は mapping cone がある。

$\varphi : \mathcal{F}^\cdot \to \mathcal{G}^\cdot$: chain map

$\mathrm{Cone}(\varphi)^k = \mathcal{F}^{k+1} \oplus \mathcal{G}^k$

<u>Spherical object</u>　　$\dim_{\mathbb{C}} M^\vee = n$

$\mathcal{E} \to M^\vee$: sheaf.

が Spherical object

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong H^k(S^n : \mathbb{C})$

<u>例</u>　← toms にすぎず.

$M = CY$, $\mathcal{E} = L$: line bdl

$\mathrm{Ext}^m(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = H^{0,m}(M) = \begin{cases} \mathbb{C} & n = 0, n \\ 0 & それ以外 \end{cases}$.

(<u>さっき</u>.　$L_0 \subset M$
$L_0 \cong S^n$　homeo
$HF(L_0, L_0) = H(S^n)$

<u>HMS</u>　$\forall L \subset M$
$\exists \mathcal{E}(L) \to M^\vee$　sheaf
$\underline{\mathrm{Ext}(\mathcal{E}(L_a), \mathcal{E}(L_b)) = HF(L_a, L_b)}$　よそう.

$\mathcal{E}(L_0) \to M^\vee$　spherical になってない.

$\mathrm{Ext}(\mathcal{E}(L_0), \mathcal{E}(L_0)) \cong HF(L_0, L_0) \cong H(S^n)$: $\mathcal{E}(L_0)$ spherical diffeo.

(Dehn twist $\rightsquigarrow$ sym. diff $\rightsquigarrow$ $\mathbb{D}M^\vee$ の自己同型.
(M の同型ではない).)

<u>仮定</u>:　$\mathcal{E} \to M^\vee$　spherical object.

$T_{\mathcal{E}} : \mathbb{D}(M^\vee) \to \mathbb{D}(M^\vee)$

・$\mathcal{F} \to M^\vee$: coherent sheaf.

$\underbrace{\mathrm{Ext}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}_{\text{abel群}} \otimes \underset{\text{sheaf}}{\mathcal{E}} \to \mathcal{F}$

の <u>mapping cone を $T_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ とする</u>。

$\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$
$u \in \mathcal{E}_p$
$f(\alpha, u) = \alpha_p(u) \in \mathcal{F}_p$.

FMトrの特別ではないところ.

<u>Prop</u>.　$\mathcal{G}$ coh sheaf.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes \mathrm{Ext}(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Ext}(\mathcal{G}, T_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

S-2

齋藤氏

モノドロミー保存変形とフロベニウス構造 II.

Frob. Str.
よいばおいの分類　　，　CY の B model から現れるかんすうのけいさん
　　　　　　　　　　　maximal deg. pt ⇝ flat str.

∘ Frobenius mfd

M: cpx analytic mfd　　（ある点の近傍．germ と思ってよい）

Def M: Frobenius mfd （Manifold with flat str.）

(1) $*$: $TM \otimes TM \to TM$.　commutative, associative　prod

(2) g : $TM \otimes TM \to \mathcal{O}_M$　a symmetric non deg. bilinear form, flat.

(3) $e \in \Gamma(M, TM)$ vector field．$e * \partial = \partial$　$\forall \partial \in \Gamma(M, TM)$

(4) $E \in \Gamma(M, TM)$　s.t.

オイラー op

(a) ∇: g に関する Levi-Civita connection.

i.e.?　$\nabla g = 0$

$\nabla_{\partial_X}\partial_Y - \nabla_{\partial_Y}\partial_X - [\partial_X, \partial_Y] = 0$

と考えると分かりやすい

以下 $\partial_X \rightsquigarrow X$

$\nabla e = 0$

(b) $C(X, Y, Z) = g(X * Y, Z)$　　X, Y, Z symmetric.

$(\nabla_X C)(Y, Z, W)$　symmetric w.r.t. X, Y, Z, W

(c) (c-1) $\nabla E \in \Gamma(M, \mathrm{End}(TM))$: ∇-holizontal

(c-2) ...

(c-3) ...

$x \in M$

$TM_x \otimes TM_x \to TM_x$

見たものは...... は ...... 表現で，これだけではなにもできない。

$$\boxed{\text{目標：}\ \left.\begin{array}{l}\text{Frobenius mfd } M\\ \text{Flat structure on } M\end{array}\right]\text{の}\ \begin{array}{l}\text{local な}\\ \text{① 分類}\\ \text{② 構成}\end{array}}$$

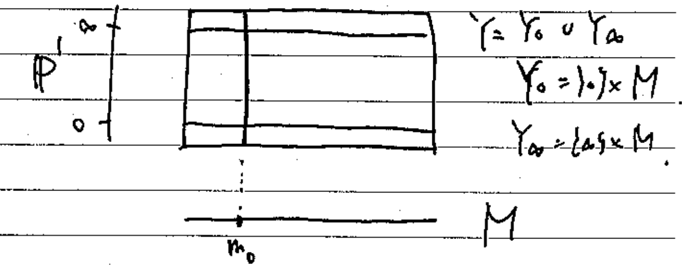
M: complex analytic mfd.　　meromorphic, pole

$\nabla : \pi^*(TM) \to \pi^*(TM) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1 \times M}[*Y]$

sheaf と思う

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times M$
$\downarrow \pi$
M

fiber $\mathbb{P}^1$ 上に 制限すると $\mathbb{P}^1$ 上の connection。



$Y = Y_0 \cup Y_\infty$
$Y_0 = \{0\} \times M$
$Y_\infty = \{\infty\} \times M$.

こういうものを考える。

（M: frob $\Leftrightarrow$ ∇ がつくれる。）

$$\boxed{\nabla \text{ の integrability} \iff * \text{ の associativity}}$$

∘ Flat meromorphic connection

Z　$(= \mathbb{P}^1 \times M)$
$\cup$
Y : hypersurface

$\mathcal{O}_Z[*Y] = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{O}_Z(mY)$　　Y でいくらでも pole をもってよい。

Def (F, ∇) flat merom. conn. on $(Z \supset Y)$

(i) $F \to Z$: $\mathcal{O}_Z[*Y]$ locally free - module

$\left(F \simeq \mathcal{O}_Z[*Y]^{\oplus d} \quad \text{local に}\right)$

(ii) ∇: $F \to F \otimes \Omega^1_Z[*Y]$

s.t. $\nabla(f v) = df \otimes v + f \nabla v$,

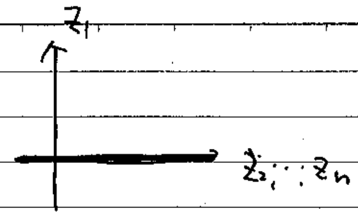
$\nabla^2 : F \longrightarrow F \otimes \Omega^2_Z[*Y]$: curvature.

$\nabla^2 = 0$　(flat or Integrable)

• local に.

$Y \subset Z$

$z_1 = 0$



$Z = D^n \supset Y = \{0\} \times D^{n-1}$
$(z_1 \cdots z_n)$

$$\begin{array}{c} F \\ \downarrow \\ Z \end{array} \qquad e_1, \cdots, e_d : \text{local section.}$$

baseに depend(た がいいかも

$$De_i = \sum_{i=1}^{d} \Omega_i^j(z) e_j$$

$\Omega = (\Omega_i^j(z))$: connection matrix

$\cap$

$\Omega_Z^1(*Y)$

$$\Omega_i^j = \sum \Omega_{i\,k}^j(z)\, dz_k$$

∇ の type along Y $= r$

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ $r = \min\{r,\ z_1^r \Omega$ の成分が $\Omega_Z^1(\log Y)$ に入っている$\}$

$\Omega_Z^1 = \sum \mathcal{O}_Z dz$

$$\Omega_Z^1(\log Y) = \mathcal{O}_Z \frac{dz_1}{z_1} + \sum_{i=2}^{n} \mathcal{O}_Z\, dz_i$$

とりあえず baseを fix

「 type $r = 0 \iff \Omega_i^j \in \Omega_Z^1(\log Y) \iff \nabla$ は regular singular along Y

$$\nabla = d + \Omega = d + \frac{\Omega_1}{z_1} dz_1 + \sum_{i=2}^{n} \Omega_i\, dz_i$$

Ω_1, Ω_i : $z_1 \cdots z_n$ の hol fct を成分とする行列. 」

「 type $r = 1 \iff \nabla = d + \Omega = d + \left[\frac{\Omega_1}{z_1} + \Omega_1'\right]\frac{dz_1}{z_1} + \frac{1}{z_1}\sum_{i=2}^{n} \Omega_i\, dz_i$

$\Omega_1, \Omega_1', \Omega_i$: $z_1, \cdots, z_n$ について正則. 」

∇ : integrable $\iff \nabla^2 = 0$.

• type $r = 0 \Rightarrow (F|_Y, \nabla|_Y)$: integrable conn. on Y.

Yに せいげんできる

$$\Omega = \sum_{i=2}^{n} \Omega_i(0, z_2, \cdots, z_n)\, dz_i$$

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0.$$

• type $r = 1 \Rightarrow (F|_Y, \nabla|_Y)$

$\nabla(f v) = df \otimes v + f \nabla v$

Φ = [illegible]

$\Phi : F|_Y \to F|_Y \otimes \Omega_Y^1$: $\underline{\mathcal{O}_Y\text{-linear}}$.

$\boxed{\Phi \wedge \Phi = 0}$ $\leftrightarrow$ associativity :

$\to$ Higgs bundle.

• Type $r = 1$

$$\nabla = d + \Omega = d + \frac{1}{z_1}\left[\Omega_1 \frac{dz_1}{z_1} + \sum_{i \geq 2} \Omega_i\, dz_i\right]$$

$$= d + \underbrace{\Omega_1 \frac{dz_1}{z_1^2}}_{= \Omega'} + \underbrace{\sum_{i \geq 2} \frac{\Omega_i}{z_1}\, dz_i}_{= \Omega''}$$

$$\Phi = (z_1 \Omega'')_{z=0} = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(0, z_2, \cdots, z_n)\, dz_i$$

$$R_0 = \Omega_1(0, z_2 \cdots z_n)$$

Exercise : $\nabla^2 = 0 \Rightarrow \Phi \wedge \Phi = 0$, Φ : $\mathcal{O}_Y$-linear

$\Phi \in \mathrm{End}(F|_Y) \otimes \Omega_Y^1$

$\Omega_Y^1 \otimes T_Y \otimes \Omega_Y^1$

(さきまわり) $F|_Y = TY$

$\xi, \eta \in TY \quad \xi * \eta = -\Phi(\xi)(\eta) \in TY$

$\Phi \wedge \Phi = 0 \Rightarrow (\xi * \eta) * \tau = \xi * (\eta * \tau)$

No. 12

Date.

Sabbah にそってやっている。

なにをやりたいか … 核心部分

Def (Kyoji Saito structure) without metric (for simplicity)

M: analytic mfd

(1) $D: TM \to TM \otimes \Omega^1_M$ torsionless flat conn.

i.e. $D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$, $D^2 = 0$.

(2) $\Phi: TM \to TM \otimes \Omega^1_M$ $\mathcal{O}_M$-linear, symmetric.

(3) $e, E \in \Gamma(M, TM)$ v.field. (M, D, Φ, e, E)

satisfying the following conditions:

(1) $\pi: \mathbb{P}^1 \times M \to M$, $z \in \mathbb{P}^1$

$$\mathbb{D} = \pi^*(D) + \frac{\pi^*(\Phi)}{z} - \left(\frac{\Phi(E)}{z} + DE\right)\frac{dz}{z}$$

$$\mathbb{D}: \pi^*(TM) \to \pi^*(TM) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1 \times M}(*Y)$$

$Y = Y_0 \cup Y_\infty$, $Y_0 = \{0\} \times M$, $Y_\infty = \{\infty\} \times M$,

$\mathbb{D}^2 = 0$ i.e. $\mathbb{D}$: flat.

(2) $De = 0$. $\Phi(e) = -\mathrm{Id}$

これはなにをあたえるか？

$\xi, \eta \in TM$

$\xi * \eta = -\Phi(\xi)(\eta) \in TM$

$= \eta * \xi$

($*$を与える $\Leftrightarrow$ Φを与える)

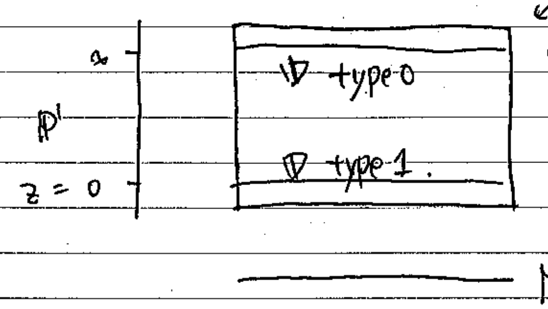
(D: torsionless $\Rightarrow$ $D\partial_{t_i} = 0$ $\quad$ $\mathbb{D}(\varepsilon)$ $\quad$ $t_1 \cdots t_n$ M … $\to$ flat str.)

木山 $\quad$ 3×3 の system の compatibility cond $\to P_{VI}$

No. 13.

Date.

ある式の変形,



$\mathbb{D}$ on right.

$\mathbb{D}|_{0\times M} = \Phi$: Higgs field

↓

$*$ を決める。

パンルヴェも明示的に？

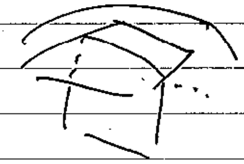
Example: Candelas の例. (何の example ?)

$$\mathbb{P}^4 \times D \supset \mathcal{X} = \{x_0^5 + x_1^5 + \cdots + x_4^5 - 5t^{-1} x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\}$$

$(x_i), t$ $\quad \downarrow \pi$

$D \qquad \mathbb{P}^4$

$\pi^{-1}(t=0) = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ 退化 CY 3fold.



$t \neq 0$ $\quad \mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$ smooth CY.

$\exists G$: finite abl… ??

$\tilde{\mathcal{X}}^\vee$ crepant resolution

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathcal{X}}^\vee \\ & \swarrow & \\ \mathcal{X}/G & & \\ \downarrow & \swarrow \pi & \\ D & & \end{array}$$

$h^{11}(\tilde{\mathcal{X}}_t^\vee) = 101$

$h^{21}(\tilde{\mathcal{X}}_t^\vee) = 1$

一般に

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \supset & \mathcal{X}^\circ & & \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\ 0 \in D & \supset & D^\circ = D - \{0\} & & \end{array}$$

$\pi|_{\mathcal{X}^\circ}$: smooth family of CY-3fold.

π: proj. flat morphism.

No. 14

Date.

$\mathbb{H}$
$\downarrow$ $\mathbb{Q}^{2b+2}$?
D^0

$\mathbb{H} = R^3\pi_{*}\mathbb{Q}_{\mathcal{X}^0} \longrightarrow D^0$: ~~local system~~

$\underset{z\in D^0}{\cup} H^3(\mathcal{X}^0_z, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^{(2b+2)}$?

$\nabla : \mathbb{H}\otimes\mathcal{O}_{D^0} \longrightarrow \mathcal{H}\otimes\Omega^1_{D^0}$ flat conn がつきる?

$\mathcal{H}$ s.t. $\ker\nabla = \mathbb{H}$

$\pi_1(D^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^3(X_s, \mathbb{Q})) \simeq GL_{2b+2}(\mathbb{Q})$

$\mathbb{Z}(\delta_1) \longrightarrow T_{\delta_1} = T_1$

assume T_1 : unipotent (quasi unip. は底変換で)

$N = T_1 - Id \quad N^4 = 0$

$H^3(X_s, \mathbb{C}) = H^{30}\oplus H^{21}\oplus H^{12}\oplus H^{03}$

X_s: CY $\rightarrow$ 1 b b 1

$F^3_s \quad F^2_s \quad F^1_s \quad F^0_s$; filtration.

$\mathcal{F}^p \subset \mathcal{H}$ subsheaf

$0\subset\mathcal{F}^3\subset\mathcal{F}^2\subset\mathcal{F}^1\subset\mathcal{F}^0 = \mathcal{H}$

~~Hodge Filt.~~ on D^0

$\nabla(\mathcal{F}^p) \subset \mathcal{F}^{p-1}\otimes\Omega_{D^0}$

Griffith transversality.

No. 15

Date.

$H^3(X_s, \mathbb{Q}), N \Rightarrow$ weight filter W

$0\subset W_0\subset W_1\subset W_2\subset W_3\subset W_4\subset W_5\subset W_6 = H^3$

flat $W_k \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{H} \supset \mathcal{F}^p$
weight filt. analitic Hodge filt.
$\downarrow$
D^0.

Def. $0 = \{z=0\}\subset D$ が maximal unipotent point $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} N^4 = 0 \\ N^3\neq 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow W_l / W_{l-1} = \{0\}$ ~~l: odd~~

$\boxed{N W_l \subset W_{l-2}}$

$0\subset \underbrace{W_0}_{e_0} = \underbrace{W_1\subset W_2}_{e_1\cdots e_b} = \underbrace{W_3\subset W_4}_{e_1'\cdots e_b'} = \underbrace{W_5\subset W_6}_{e_0'}$

$N^3 e_0' = e_0. \quad N e_i' = e_i \quad 1\leq i\leq b.$

$0\leq k\leq 3 \quad {}^\forall s\in D^0$

$\mathcal{H}_s = \mathcal{F}^k_s \oplus W_{2k-2}$?

Hodge fil. と weight fil. が互いに complimental

$N e_0 = 0. \quad N e_i = a_i e_0 \quad a_i\in\mathbb{Q}$

$T_1\gamma_0 = \gamma_0 \quad T_1 e_0 = e_0 \quad T e_i = e_i + a_i e_0$

dual γ_1 $\quad H^3(X_s, \mathbb{Q}) \quad \gamma_i$

$\mathcal{X}$ $\quad g_0(z) = \int_{\gamma_0}\omega(s) \in\mathcal{O}_{D^0}$ (hol 3 form) 1価.

$\downarrow$

D $\quad m_i\in\mathbb{Z} \quad m_i a_i\in\mathbb{Z}$

$\omega\in\Gamma(D, K_{\mathcal{X}/D})$ $\quad g_i(z) = \int_{\gamma_i}\omega(s)$

$g_i(\exp(2\pi i)z) = g_i(z) + a_i g_0(z)$

って.

No. 16

"flat coordinate"

$t_i = \frac{m_i g_i(z)}{g_0(z)}$ $\qquad t_i(\exp(2\pi i)z) = t_i + m_i a_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$

$q_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\, t_i)$ $\qquad q_i$ は monodromy で inv.

ほんとうは. $D \to D^n$ $\quad z_1 \cdots z_n$ $\quad \theta_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$

$\Phi^{(B)}(z_1 \cdots z_n)(\theta_i, \theta_j, \theta_k)$ B-model prepotential.

$= \int_{X_s} \nabla_{\theta_i} \nabla_{\theta_j} \nabla_{\theta_k} \omega(s) \wedge \omega(s)$

$[q_1 \cdots q_b]$

$n = b = h^{2,1}(X_s) = \#$ of complex moduli X_b

K-1

No. 1 Date. 2002・9・10

加藤晃史氏

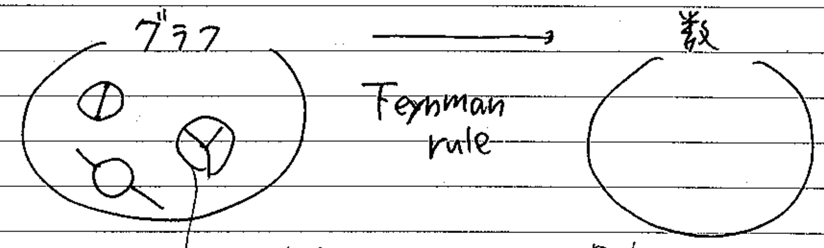
繰り込みと Hopf 代数 I

Connes - Kreimer CMP.

ここでやるくりこみとは

点粒子の場の理論

category チックに



量子力学を仮定 $\qquad$ well def である!!

ill-defined

※ loop をもつ diagram ⟶ 数 $= \infty$ 発散する!

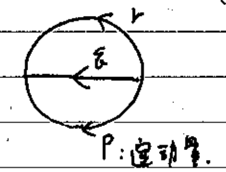
点 • ← g : 結合定数 ~~Flat str. の座標?~~

edge — ← propagator $\qquad \int \frac{e^{ip\cdot x}}{p^2+m^2} d^D p$ グリーン関数

rem. $\left(-\sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m^2\right) G(x) = \delta^D(x)$ グリーンカーネル?

Klein - Gordon op. $\qquad m=0$ のとき 波動方程式

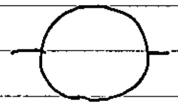
粒子が3つうまれてきえるプロセス



$\longrightarrow \int \frac{1}{p^2+m^2} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{r^2+m^2} \times \delta^D(p+q+r)\, dp\, dq\, dr$

数は多重積分で与えられる。

D=4 で log 発散。



$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(p^2+m^2)^2} \quad : 発散.$$

(c.f. $1+1+1+\cdots = -\frac{1}{2} \leftarrow \zeta(-1)$

リーマンゼータ $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ 解析接続.)

4次元で計算したいけど、次元について解析接続する！

<u>次元正則化</u>.

頂点→デルタ関数?

ループがあると発散

$$\text{グラフ} \xrightarrow{\ \phi\ } \varepsilon = D-4 \text{ に関する有理型関数}$$

↙変数

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2} = \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{p^{D-1}dp}{(p^2+m^2)^2} = \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} m^{D-4} \underbrace{\int_0^\infty \frac{z^{D-1}dz}{(z^2+1)^2}}_{= \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(-\frac{D}{2}+1)}{2}}$$

半径方向.

$p = mz$ m: 無次元.

ε=0のとき発散するけど、なんとかしたい。

くりこみ

主要部を除ける?

D=4 での値をひきだしたい！

D=4のとき、poleにあたって発散

D=3.999…とかのときはよい。

グラフ

$$\Gamma \longrightarrow \phi(\Gamma) = \underbrace{\frac{a_n}{\varepsilon^n} + \cdots + \frac{a_1}{\varepsilon}}_{すてる} + a_0 + a_{-1}\varepsilon + \cdots$$

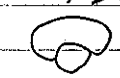
すてる ⇒ ε→0 の極限がある。

でもそんなかんたんにはいかない。

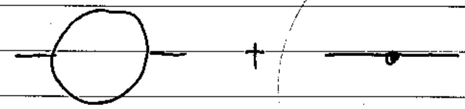
場の理論の考え方らしくと、

ローカルに…ラグランジアンをすこしかえて実現できなくてはいけないらしい。

(グラフが多重ループのときは… いろいろまずい。


)

$\boxed{\text{C-K: くりこみ操作は Hopf 代数の言葉で表せる。}}$



ほしいのはうまく対応

こういうのをたくさん足していく。

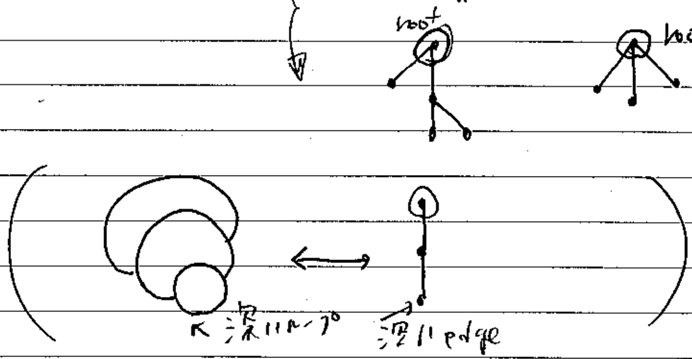
$$\sum_{N \geq n} \frac{a_n}{\varepsilon^n} \qquad -\sum_{N \geq n > 0} \frac{a_n}{\varepsilon^n}$$

負の部分を消す人。

幾何的には

$\boxed{\text{V.bdl の Birkhoff 分解}}$

目次：
1. Hopf 代数
2. Rooted trees のなす Hopf 代数
3. 場の理論のくりこみとの関係.



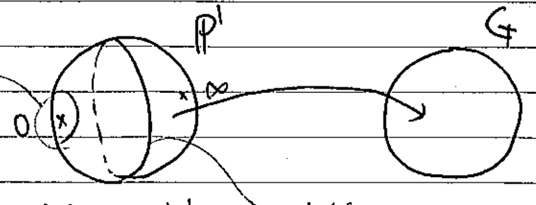
<u>Birkhoff 分解</u>

$$\gamma : S^1 \longrightarrow G : \text{Lie group}$$

cpx

$S^1 = \{|z|=1\}$ 次元の空間?

← フーリエ展開できる。



ここへの map に拡張したい。

bdl の貼りあわせの情報が与えられている

Q: $\exists ?\ \gamma_+ : U_+ \longrightarrow G$: hol map
$\exists ?\ \gamma_- : U_- \longrightarrow G$: 〃

s.t. $\gamma_-(z)\,\gamma_+(z) = \gamma(z)$ on $z \in U_+ \cap U_-$ ＝ 分解したい

A: Yes $\gamma_-(\infty) = 1$ とすると unique.

§. Hopf 代数

motivation: 例. G: 有限群 ～ コレにかんして linear spaces

(Gの上で各点がまとまって波動関数) → $H = \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

代数としての ⟶ $1(x) = 1$
1つものがり方

単位元をもつ可換環 ← G集合としたがりの性質

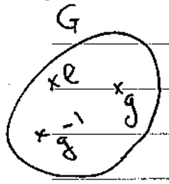
Gの群構造を反映するには?

Coalg str. $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$: coproduct (余積)

1体の波動fct ↦ 2体の波動fct.

$f \qquad \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Map}(G \times G, \mathbb{C})$

$(\Delta f)(g_1, g_2) := f(g_1 g_2)$



$S : H \longrightarrow H$ この対応はあるいは nonlocal
$f \longmapsto Sf$ antipode (対合射) かもさ,

$(Sf)(g) = f(g^{-1})$

⟿ 非可換

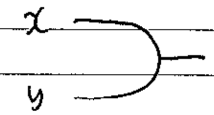
$\varepsilon : H \longrightarrow \mathbb{C}$: counit.
$f \longmapsto f(e)$

* $H = \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ ← alg $x, +, 1$; ← coalg Δ, ε] S

こういうのを Hopf 代数という。

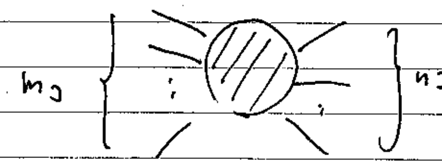
Def: 公理を絵で表す.

データの流れ ⟹
左から右



$x \cdot y$: 積

絵で表されるものは k 上 a linear map.



⟺ $V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes n}$ hom.

・基本演算

積 $H \otimes H \to H$.

余積 $H \to H \otimes H$

単位元 ($k \to H$ とみる)

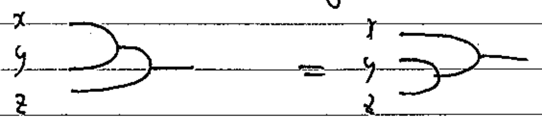
counit $H \to k$.

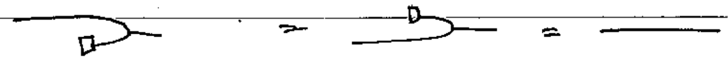
S: antipode $S: H \to H$

No. 6
Date.

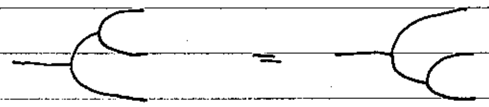
◎ 公理たち

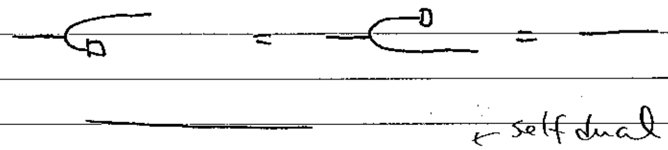
☆ (H, ·, 1) が alg.


: 結合法則.

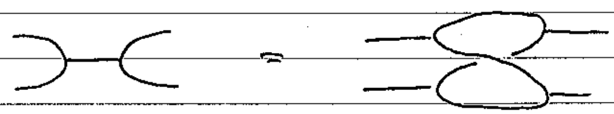

: 単位元.

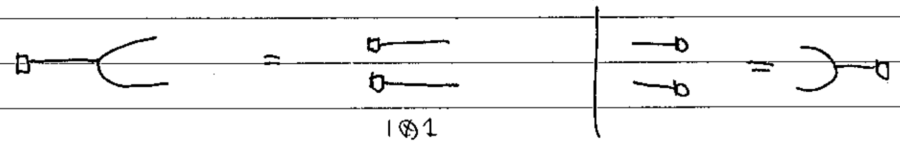
☆ (H, Δ, ε) が co alg


: coassociativity.

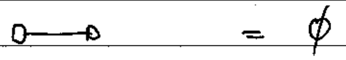


← self dual

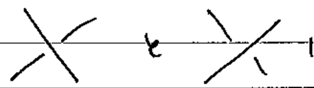


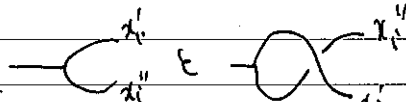


1⊗1


= ϕ

Rem

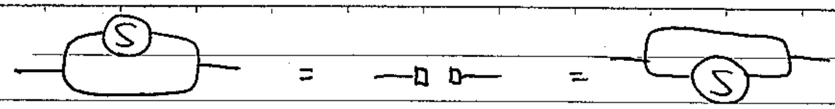
・  は区別しなくてよい

・  はちがう

$\Delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i'' \neq \tau \circ \Delta(x)$

$\tau : H \otimes H \circlearrowleft \quad x \otimes y \mapsto y \otimes x$

No. 7
Date.



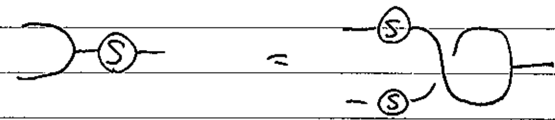
例. $f \to (\Delta f)(g_1, g_2)$

$\searrow f(g_1 \cdot g_2) = f(e) = f(e) \cdot 1$

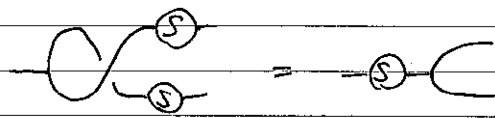
公理なし

◎ Sは alg anti hom

$S(xy) = S(y)S(x)$



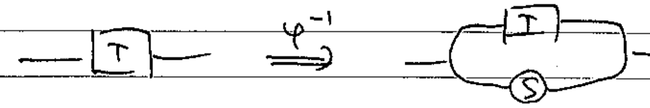
Self dual なので 左右も成り立つ



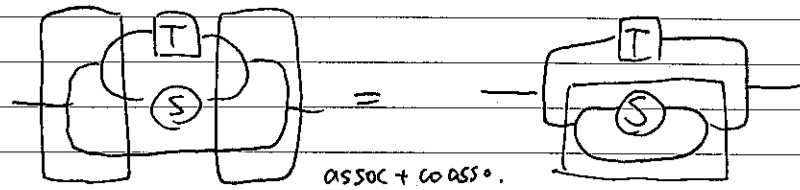
Lemma $\varphi : \mathrm{End}(H) \to \mathrm{End}(H)$

$T \mapsto \varphi(T)$

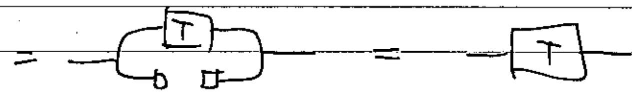
で def すると φは可逆で.



☺ $\varphi \circ \varphi^{-1} = id$ を示す. ($\varphi^{-1} \circ \varphi = id$ も同様)

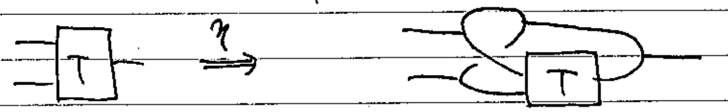


assoc + coasso.

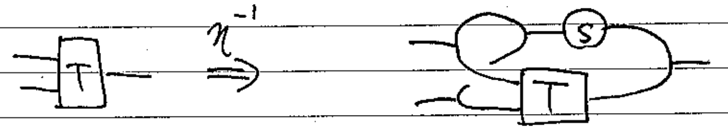


<u>Lemma</u> $\eta : \mathrm{Hom}(H^{\otimes 2}, H) \circlearrowleft$ をこれで def

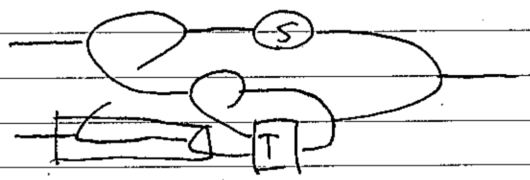
Ψ
T



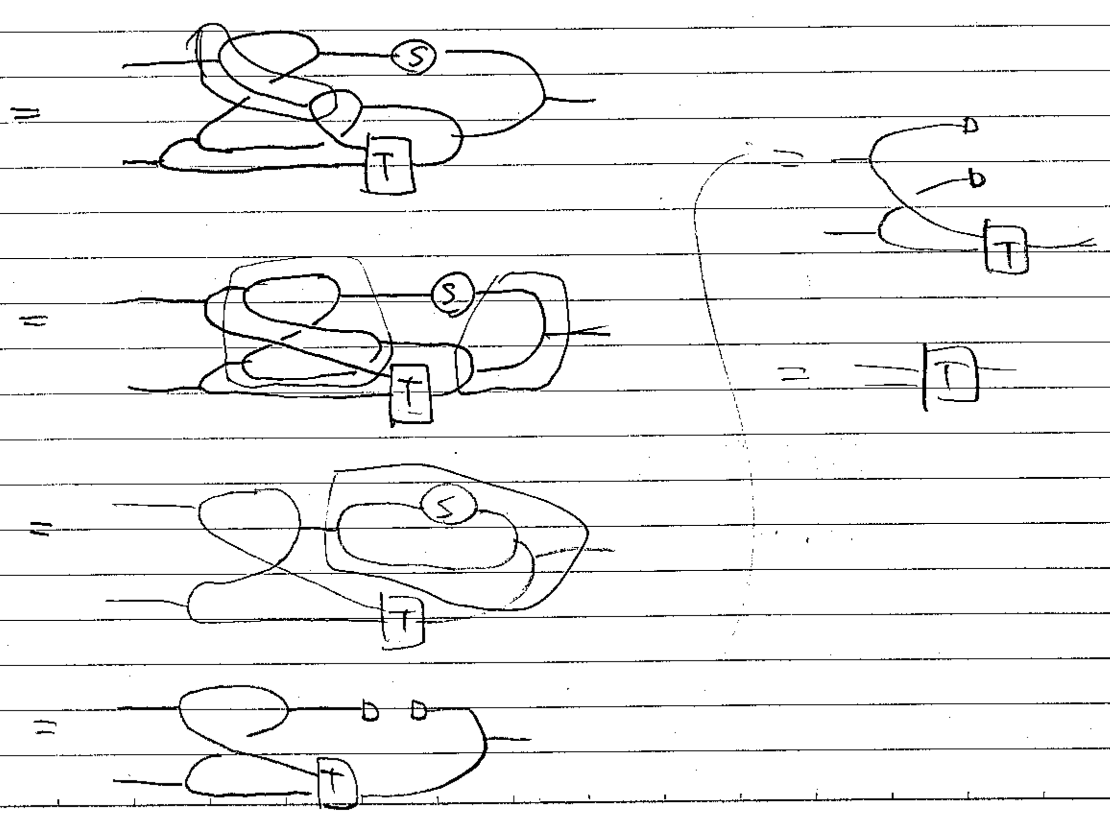
このとき η も可逆で、



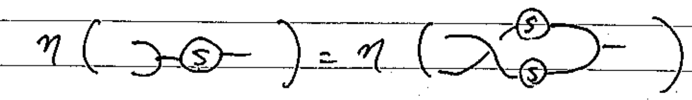
∵ $\eta^{-1} \circ \eta = id$ を示す

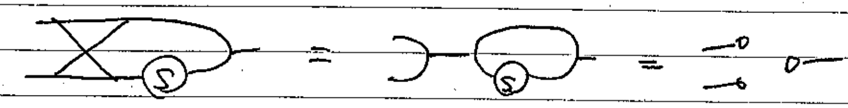


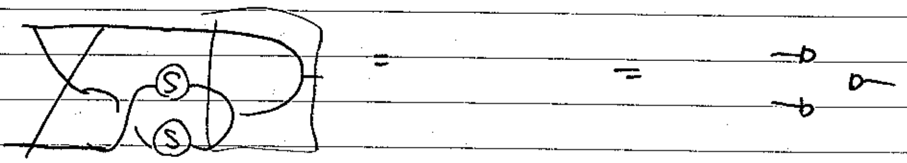
Co prod の2だん重ね.



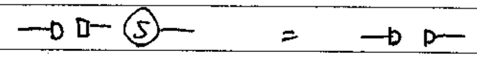
<u>Prop</u>. $S(xy) = S(y)S(x)$, $S(1) = 1$

∵  を示す.

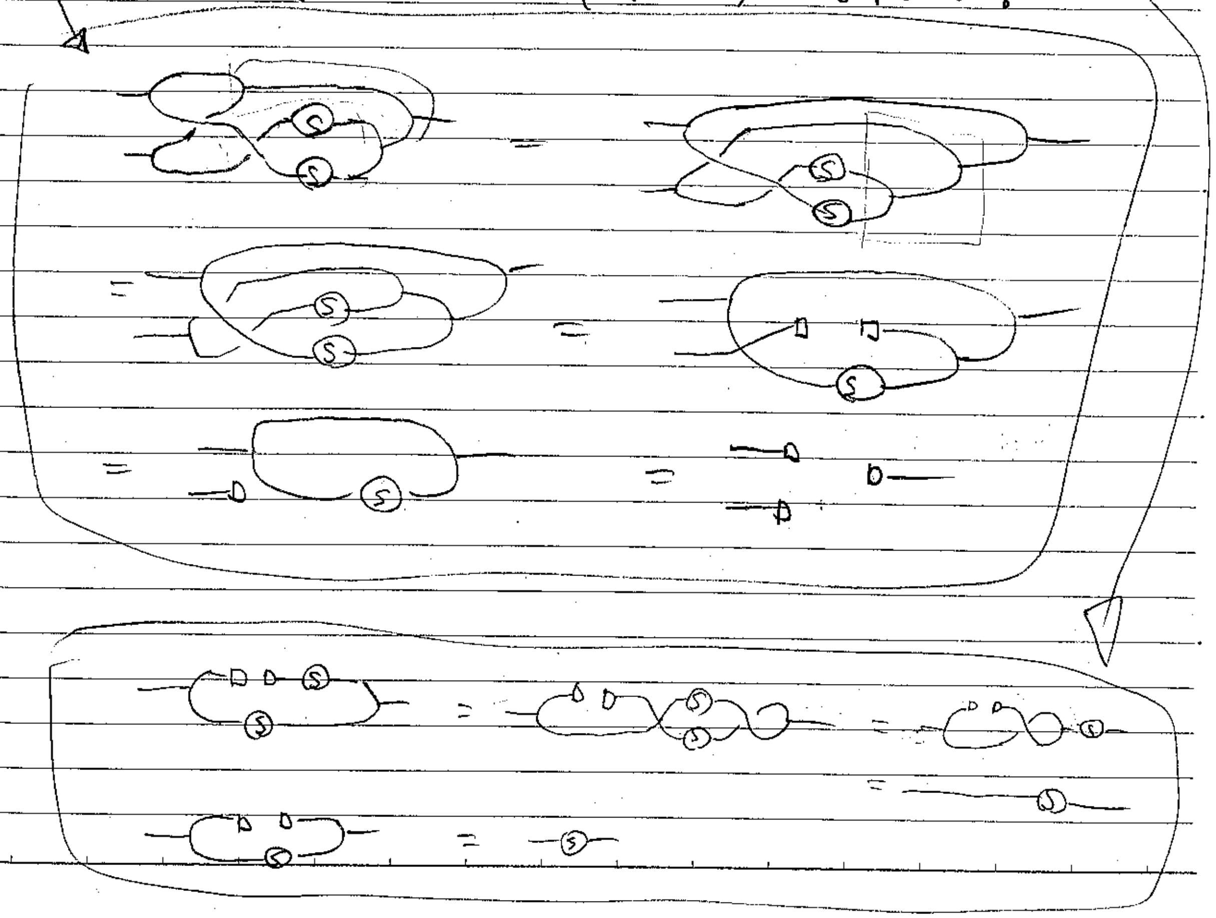
左辺 = 

右辺 = 

・ $S(1) = 1$ は $\otimes \varepsilon$ をして H の元とみる。

 を示せばよい。

$\varphi^{-1}(\quad) = \varphi^{-1}(\quad)$ を示せばよい。



T-1

No. 1
Date. 2002. 9. 10　　高橋篤史

原始形式と位相的場の理論入門 I

Introduction

Mirror Symmetry　　90年代　Candelas et al

M : CY 3fold (such a) $\Rightarrow$ $\exists M^\vee$: mirror mfd CY 3-fold.

s.t. $H^2(M,\mathbb{C})\times H^2(M,\mathbb{C}) \to H^1(M^\vee, TM^\vee)\times H^1(M^\vee, TM^\vee)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ H^4(M,\mathbb{C}) & \Leftrightarrow & H^2(M^\vee,\wedge^2 TM^\vee) \end{array}$$

左　Def of cup prod by "$\#\{\mathbb{P}^1\subset M\}$" depend on complexified kähler class

$\|$　　←これがだ計算できる。

右　sheaf chomomology の積
　　(period で計算できる)

M : $\{5次式=0\}\subset \mathbb{P}^4$

$M^\vee_\psi := \{x_1^5+\cdots+x_5^5-5\psi x_1\cdots x_5=0\}/\mathbb{Z}_5^3$　　Crepant resol

Hodge diamond.

$h^{p,q}(M)$　$p\swarrow\ \searrow q$　　$h^{p,q}(M^\vee_\psi)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ 1 & & 101 & & 101 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

topological mirror.　　　こんなかんじ

No. 2
Date.

kähler
$\updownarrow$

$t_K\in \mathcal{U}_{large}\subset K_{\mathbb{C}}M$: M の compaxified kähler mfd.

$\|$

$\{t_K\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\, t_K \gg 0\}$,　　$\mathbb{C}$

$\int_M (H\circ_{\,q} H)\cup H = 5 + n_1\dfrac{q}{1-q} + n_2\cdot 2^3\dfrac{q^2}{1-q^2}+\cdots$

$\circ_q$: deformしたcup prod.　n_1 〜 q　　$q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,t_K)$

$H^2(M,\mathbb{C})=\mathbb{C}H$.

(これを求めたいけど ミラーにもってい?)

$M^\vee_\psi$ で period を考える.　$F_\psi := x_1^5+\cdots+x_5^5-5\psi x_1x_2x_3x_4x_5$

$\Omega_\psi := \mathrm{Res}_{F_\psi=0}\dfrac{\psi\sum_{i=1}^5(-1)^i x_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_5}{F_\psi}$　: hol 3-form　nel

(Griffith - Dwork method)

$z:=\psi^{-5}$　$\Downarrow$

すはさきとくに　$\left[\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^4-5z\left(5z\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\left(5z\frac{\partial}{\partial z}+2\right)\left(5z\frac{\partial}{\partial z}+3\right)\left(5z\frac{\partial}{\partial z}+4\right)\right]\int\Omega_\psi=0$

$z=0,1,\infty$ = sing.　　orbifold sing.

$z=0$: maximally unipotent monodromy point.　$\sim\begin{pmatrix}1&1&&0\\&1&1&\\&&1&1\\0&&&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (4つの解) $=$ (hol, $\log z$, $(\log z)^2$, $(\log z)^3$)
　　　$\uparrow z=0$で　　$\|$　　　　　　　　　それぞの sing
　　　　　　　　　　　ω_1

$\omega_0 := \sum_{n\geq 0}\dfrac{(5n)!}{(n!)^5}z^n$　　　$z=0$　　$\mathbb{C}z$

この丸んでの解のふるまいをみたい

$t_c := \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$: flat coordinate.

Complex サイドの係

$\Omega^{new} := \dfrac{\Omega_\psi}{\omega_0}$

4つの独立解 $=\omega_0\langle 1,\ t_c,\ \partial_{t_c}\mathcal{F},\ 2\mathcal{F}-t_c\partial_{t_c}\mathcal{F}\rangle$

ピカール・フックスの方程式

$(\partial_{t_c})^2(C_t^{-1})(\partial_{t_c})^2\int\Omega^{new}=0$

ただし, $C_t := (\partial_{t_c})^3\mathcal{F}$　　が'C

これでかきかえ

No. 3
Date. . .

$$\partial_{t_c}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & C_t & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$C_\psi = \int \Omega \wedge \partial_{t_\psi}^3 \Omega$: Yukawa coup.

$C_t = \int \Omega \wedge \partial_{t_c}^3 \Omega$

主張 : C_t が $H^1(M^\vee, TM^\vee)$ の積を定める。

$H^1(M^\vee, TM^\vee) \times H^1(M^\vee, TM^\vee) \to H^2(M^\vee, \wedge^2 TM^\vee)$

- Candelas たちの計算

$t_K = t_c$, $\boxed{\int_M (H \cdot_t H) \cup H = (\partial_t)^3 F}$

予言 : $n_1 = 2875$, $n_2 = 609250$, ...

- Givental (G.W inv の def の方)

mirror の period である事が証明された。

よくみるものの → t_c : ⟷ flat coordinate

Ω_ψ ⟷ primitive form.

$$\begin{array}{ccc} M & & M^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{ある String Theory} & = & \text{別の string theory} \end{array}$$

↑こうあるべきだということはさきほどわかっていたけれど。

- Full string theory での比較

⇒ Homological mirror symmetry

または {
- (twisted) $N=2$ string theory での比較 (M と $M^\vee$ が)

⇒ Hodge 構造の理論。

- Topological string theory での比較

⇒ flat str. primitive form.

これから

No. 4
Date. . .

Remark : (深谷さんたちのlectureであったもの)

HMS の下.

Fourier-Mukai 変換 ⟷ (Mirror) Monodromy of PF eq for $M_\psi^\vee$

$\Phi : D^b(Coh(M)) \to D^b(Coh(M))$

Auto

chern character

$\phi : \bigoplus_p H^{p,p}(M) \to \bigoplus_p H^{pp}(M)$

$$\begin{array}{ccccc} & & M\times M & & \\ & \swarrow^{p_1} & \overset{\cup}{\Delta} & \searrow^{p_2} & \\ M_1 & & \text{diag.} & & M_2 \end{array}$$

$z=0$ の monodromy T_0

$(T_0 - I_d)^4 = 0$ $(T_0 - I_d)^3 \neq 0$

Lefschetz sl_2 action on $\bigoplus_p H^{pp}(M)$ ⟷ $\log T_0$

$\Phi(A) = p_{2*}(p_1^* A \otimes L \otimes \mathcal{O}_\Delta)$ (ample)

$[A] = [A] \cdot e^H$ ⟶ T_0

$\Phi(A) = p_{2*}(p_1^* A \otimes I_\Delta)$ ⟷ $z=1$ monodromy T_1

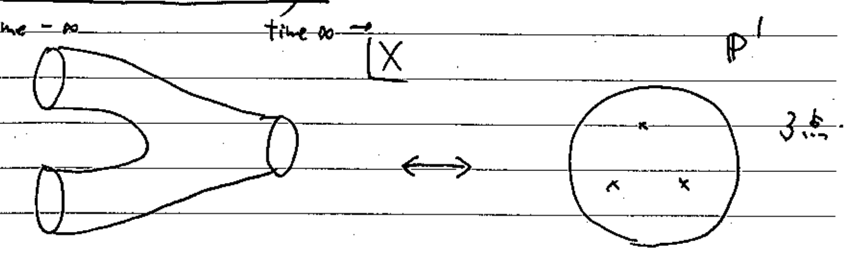
$\mathcal{E} = \mathcal{O}_M$ ⟷ $(T_0 T_1)^5 = 1$

Kontsevich $\bigoplus_p H^{pp}(M)$ 上下では

$[A] \to [A] - \langle A, \mathcal{O}_M \rangle [\mathcal{O}_M]$

Topological Field theory

用語



Moduli of Stable curve

~~stable curve of type (g,n)~~ $\quad (C_g, \{x_1,\cdots,x_n\})$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ • C_g : a connected proj curve of arithmetic genus g with at worst ODP

• $x_i \in C_g^{\text{smooth}}$ $\forall i$ $\quad x_i \neq x_j$ if $i \neq j$

• (stability) normalization of irr. comp. of genus 0 must have at least 3 special pt.

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$: moduli space (stack) of stable curves of type (g,n)

Thm (Deligne-Mumford) $\qquad$ ℚ ℂ 係数が Coh, homology とってよい

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ~~is a smooth proper DM stack of dim $3g-3+n$~~.

Cohomological Field Theory (CohFT) (Manin)

V : μ次元 $\mathbb{C}$-vect sp $= \bigoplus_{i=1}^{\mu} \mathbb{C}\gamma_i$

η : $V \otimes V \to \mathbb{C}$ non-deg sym. bilinear form.

CohFT on (V,η) is a family of $\mathfrak{S}_n$-equiv. $\mathbb{C}$-linear map. $\{I_{g,n}\}$ satisfying.

$I_{g,n} : V^{\otimes n} \longrightarrow H^*(\overline{M}_{g,n}, \mathbb{C})$

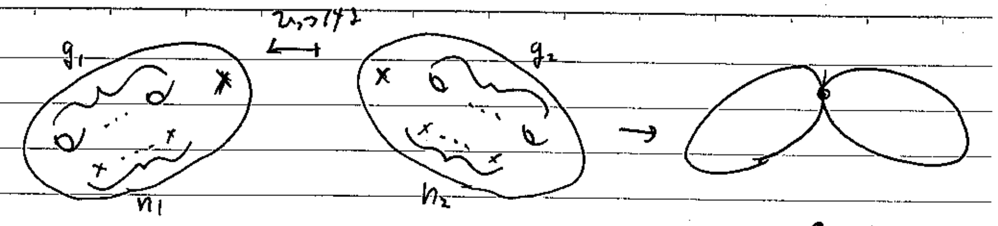
1) $\varphi_\sigma^* I_{g,n}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n) = I_{g_1,n_1+1} \otimes I_{g_2,n_2+1}\left(\bigotimes_{i \in S_1} \gamma_i \otimes \Delta \otimes \bigotimes_{j \in S_2} \gamma_j\right)$

$\sigma = \{1,\cdots,n\} = S_1 \amalg S_2 \qquad \Delta = \sum_{i,j=1}^{\mu} \gamma_i \eta^{ij} \gamma_j$

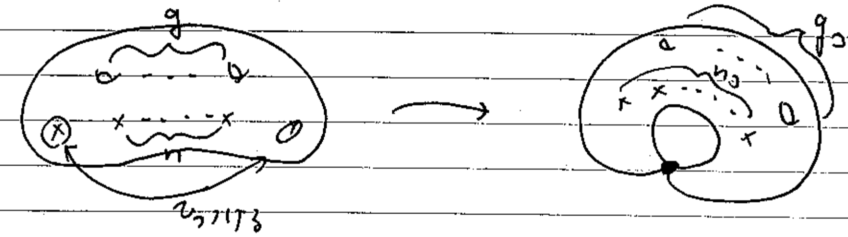
$\varphi_\sigma : \overline{M}_{g_1,n_1+1} \times \overline{M}_{g_2,n_2+1} \to \overline{M}_{g,n}$.

2) $\psi^* I_{g,n}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = I_{g-1,n+2}(\gamma_1 \cdots \gamma_n \otimes \Delta)$

つづく

1) 

$\overline{M}_{g_1,n_1+1} \qquad \overline{M}_{g_2,n_2+1} \qquad \overline{M}_{g,n}$

2) 

Remark : $\{I_{0,n}\}$ は閉じている。 $\qquad$ $g=0$ ならでは ないか?

Thm (—)

① $\overline{M}_{0,n}$ ~~is a irred. smooth. proj. variety~~,

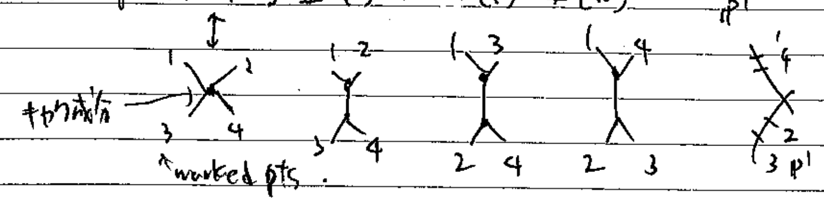
② $\ni \overline{\mathcal{C}}_{0,n} \to \overline{M}_{0,n}$: universal family

③ ~~$\overline{M}_{0,n}$ has stratification by graphs.~~

Example

$\overline{M}_{0,3} = \{pt\} \qquad \overline{\mathcal{C}}_{0,3} = \mathbb{P}^1 \quad (\mathbb{P}^1, \{0,1,\infty\})$

$\overline{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} \amalg \{0\} \amalg \{1\} \amalg \{\infty\}$



No. 7

Date.

$\bar{\mathcal{C}}_{0,4} = \{(a_0:a_1, x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2 \mid a_0x_0x_1 - (a_0-a_1)x_1x_2 - a_1x_0x_2 = 0\}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\bar{M}_{0,4} = \{(a_0:a_1)\} = \mathbb{P}^1$

$(a_0:a_1) = 0 \to (1:0)$ $\quad x_0x_1 - x_1x_2 = 0$

$1 \to (1:1)$ $\quad x_0x_1 - x_0x_2 = 0$

$\infty \to (0:1)$ $\quad x_1x_2 - x_0x_2 = 0$

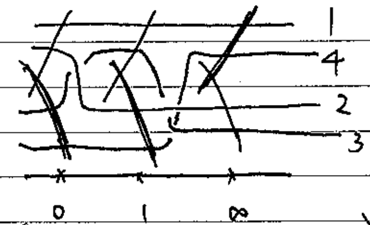
$\bar{\mathcal{C}}_{0,4}$ は $a_0(x_0x_1 - x_1x_2) + a_1(x_1x_2 - x_0x_2) = 0$

$\mathbb{P}^2$ の4点 blow up.

$\bar{\mathcal{C}}_{0,4}$

$\downarrow$

$\bar{M}_{0,4}$



$\{1,2,3,4\} = \{f_1=0\}\cap\{f_2=0\}$

をつぶす

family で 4を除くと、

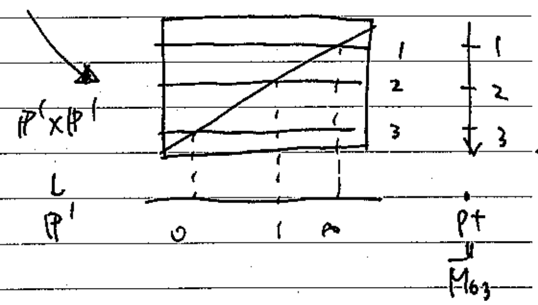
) は stable でなくなる

から blow down

しないといけない。

とすると $\bar{M}_{0,3}$ の pullback

になる?



family でかける

$\bar{M}_{0,n+1} \to \bar{M}_{0,n}$

$(C, \{x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\}) \mapsto (C^{stab}, \{x_1\cdots x_n\})$

($\bar{M}_{0,n+1} \cong \bar{\mathcal{C}}_{0,n}$

$s_i: \bar{M}_{0,n} \to \bar{M}_{0,n+1}$ なども考えなければならない。)

No. 8

Date.

($\{I_{0,n}\}_{n\geq 0}$ $\quad (V,\eta)$) $\quad$ CohFT

$\Phi := \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n!}\int_{[\bar{M}_{0,n}]} I_{0,n}(\gamma^{\otimes n}) \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{\mu} t^i\gamma_i$

(potential)

$V\otimes\mathbb{C}[[t^1,\cdots,t^\mu]]$ に 積 $\circ$ が次のように定まる:

$\gamma_i\circ\gamma_j = \sum_{k=1}^{\mu} C_{ij}^k\gamma_k \qquad C_{ijk} := \partial_i\partial_j\partial_k\Phi$

$C_{ij}^k := \sum_{l=1}^{\mu}\eta^{kl}C_{ijl}.$

<u>Thm</u> (Kontsevich–Manin)

$\circ$: associative.

<u>Remark:</u> associativity を Φ でかいたもの

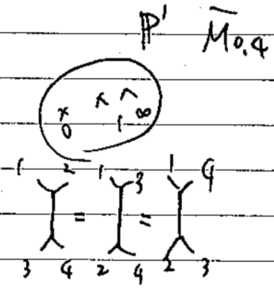
$\Rightarrow$ WDVV-eq とよぶ.

$\because$) $\bar{M}_{0,n} \to \bar{M}_{0,4}$

$[0]\sim[1]\sim[\infty]$

のひきもどしをとってみて でてくる?

と、Φ の coef



交叉対称性

($g=0$ のとき reconstruction ができることがわかる (Manin))

◎ reconstruction について

$(\tilde{\Phi}, (V,\eta))$

$\mathbb{C}[[t^1,\cdots,t^\mu]] \to \circ$: 積

associative $\Rightarrow$ $\exists\{I_{0,n}\}_{n\geq 0}$ $\quad \Phi = \tilde{\Phi}$ up to 2次

CohFT の公理を満たす

F-3

No. 19

Date. 2002・9・11　深谷氏

D-ブレーンの数学 III.

◎ Stability, Calibration etc.

Stability : $(E, \nabla) - S^1$: vect. bdl with conn.

flat — holonomy $\in GL(n, \mathbb{C})$

$h(\nabla) = A$

$Aut(E) = \{ g: E \to E \mid 同型 \}$

$\exists g \quad g^*\nabla = \nabla' \iff h(\nabla) \sim U^{-1} h(\nabla) U \quad U \in Gl(n, \mathbb{C})$

$\{E上のconn\}/Aut\,E = Gl(n, \mathbb{C})/\sim$ ←共役

↑Jordan 標準型

"quot. top は悪い" (hausdorffでない)

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t^{-2} \\ & a \end{pmatrix} \xrightarrow{t \to 0} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$\boxed{E の conn が stable \overset{}{\underset{def}{\iff}} h(\nabla) が対角化可能}$

Stable conn の moduli $= \{対角行列\}/conj = (\mathbb{C}^\times)^k / 対称群$

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix} \quad h(\nabla) = A$

$0 \to E_1 \to (E, \nabla) \to E_2 \to 0$　split しない

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2/\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \downarrow t \to 0$

$0 \to E_1 \to E_1 \oplus E_2 \to E_2 \to 0$　split.

No. 20

Date.

◎ $E \to \Sigma$: Σ : リーマン面. $rk\,E = 2$

* E が stable $\iff \forall E_1 \subset E$ sub

$c_1(E_1) < \frac{c_1(E)}{2}$ ← Σ の cpx str だけしかつかわない.

Thm. (ナラシムハン・セシャドリ)

stable bdl $\iff$ flat conn.

◎ $E \to M^2$: complex surface　ここでならもう metric もいれないといけない.

・ω : kähler form.

* E が stable $\iff \forall \mathcal{E} \subset E$ sub sheaf

$$\int \frac{c^1(\mathcal{E}) \wedge \omega}{rk\,\mathcal{E}} < \int \frac{c^1(E) \wedge \omega}{rk\,E}$$

Thm. (Donaldson)

E : stable $\Rightarrow$ Einstein-Hermitian connection.

$(\bar\partial)$ ← E の hol. str.

つまり, $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Lambda^1$

$\nabla = \nabla^{(1,0)} \oplus \nabla^{(0,1)}$

$\nabla^{(0,1)} : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \Lambda^{0,1})$

$\nabla^{(0,1)} = \bar\partial$

$F^\nabla : \in End(E) \otimes \Lambda^{1,1}$　$\nabla^2 = F^\nabla$

↑curvature

$\omega \wedge F^\nabla = c\,\omega^2$

↑E-H

$\sum F_{i\bar{i}a}^{\ \ b} = c\,\delta_a^b$

- E : hol v.bdl.

$\{D \mid D^{(0,1)} = \bar\partial\}$ ← ∞次元.

$\circlearrowleft$ $\mathrm{Aut}(E)$

$\mathrm{Aut}(E) \curvearrowright \{h : E$上の hermitian metric $\}$

Dが hと compatible $\longleftrightarrow$ $X h(Y,Z) = h(D_X Y, Z) + h(Y, D_X Z)$

$\forall h.\ \exists D$ $\begin{cases} \cdot\ D \text{は } h \text{と compatible} \\ \cdot\ D^{(0,1)} = \bar\partial \end{cases}$

- $g : E \to E$: 自己同型.

$h(gX, gY) = h^g(X, Y)$

$h \longmapsto h^g$

$\mathrm{Aut}(E) \underset{\text{transitive}}{\curvearrowright} \{h\} = \{D \mid D^{(0,1)} = \bar\partial\}$.

- hol. str をうごかす。

$\{D \mid (D^{0,1})^2 = 0\} \curvearrowleft \mathrm{Aut}(E)$

$\{D \mid (D^{0,1})^2 = 0\} / \mathrm{Aut}(E)$ = E上の hol. str の moduli

この商イソーは悪い。 ⟶ stabilityが必要。

$\boxed{\text{各 orbit から よい代表元をとりたい}}$

E-H conn (あれば) よい代表元! ~ (metric を与えれば ないけれど)

↓ ↙ Kähler form をつかわないといけない。(cpx side か cpx side だけでもない)

$F_D \wedge \omega^{n-1} = c\, \mathrm{Id} \wedge \omega^n$

↑ v.bdl の上 ス...

HMS

- Complex

有限次元. ゲージ群の作用.

$\begin{cases} E \to M^\vee \\ \text{hol v.bd.} \end{cases}$ $\mathrm{Aut}(E) \curvearrowright \{D \mid D^{0,1} = \bar\partial\}$: E-H conn

stableならよい代表元がある。

↕

- Symplectic.

$\begin{pmatrix} L \subset M \\ \text{Lag. submfd.} \end{pmatrix} / \sim$ $\quad$ $\mathrm{Ham}(M) \curvearrowright \{L\}$ ← よい代表元をとりたい

∞次元だとつらい。 moduliのcpt化とかするため。

↖ 代数手段ではできない。

Lag. smf. L $\longleftrightarrow$ $\begin{matrix}\mathcal{E} \\ \downarrow \\ M^\vee\end{matrix}$ hol. v.bdl.

$\{L\}$: ∞次元. $\qquad$ $\mathcal{E}$ の moduli : 有限次元.

$M = T^*N$

closed 1 form u $\qquad$ uのグラフ $\subset T^*N$

↕

Lag. smf.

$\mathrm{Ham}(M)$ $\qquad$ (M, ω) : symplectic mfd

$f : M \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_t(x) = f(x, t)$

X_{f_t} : M上の Vector 場

$\omega(X_{f_t}, Y) = (df_t)(Y)$

X_{f_t} : Hamilton vect. field.

$\varphi_t : M \to M$, diffeo.

$\varphi_0(x) = x$ $\qquad$ $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_{f_t}(\varphi_t(x))$

$\varphi_t^* \omega = \omega$ $\qquad$ φ_1 のことを Hamiltonian diffeo.

Lag. smf.

↘ $L \subset M$ $\quad$ $\varphi \in \mathrm{Ham}(M)$ $\quad$ $\varphi(L)$ Lag. smf

・ line bdl の同型類 Abel せんけい
・ vect 〃 非せんけい

$M = T^*N \qquad \Sigma\, d\eta_i \wedge dx_i$

~~u: N 上の 1 form $du = 0$~~

u のグラフ $\subset T^*N = M$

L_u は Lag. s.m.f.

・ $\exists \varphi \quad Ham(M)$

$\varphi(L_u) = L_v \iff u - v = df \quad {}^{\exists}f$

$$\boxed{\{\text{Closed 1-form のグラフ}\} / Ham(M) = H_{DR}(N)}$$

でHで定まるの Lag. 部分
$\Updownarrow$
Harmonic 1-form きまる (metricによって)

~~せんけいの世界~~

Calibration

M: Rieman mfd.

Ω: M 上の 1-form.

$d\Omega = 0$ 大事らしい。

<u>Def</u> Ω が Calibration

$\iff {}^{\forall} p \in M.$

${}^{\forall} V^k \subset T_pM$

k-dim linear

$\Omega|_{V^k} \leq$ M の計量 の V への制限 からきまる volume form.

<u>Example</u>

1) M: Kähler $\qquad \omega$: Kähler form.

$C_k \omega^{k/2}$ は Calibration wirtinger inequality.

$V^k \subset T_pM \quad \cdot\ \omega^{k/2}|_V \leq C_k (g|_V \text{ の vol. form})$

$\cdot = \iff V \subset T_pM$ cpx linear

2) M: CY 3fold

極小曲面の話から きた

~~M 上の hol 3 form Ω~~

$Re(e^{i\theta}\Omega)$ は Calibration

・リーマン mfd.

~~holonomy~~ $\subsetneq SO$

holonomy 群 不変な diff form

$\Downarrow$

Calibration.

extend?
Supersymetry.

<u>Def</u> Ω_k k-form Calibration.

$N^k \subset M \qquad N$ が Ω calibrated

Riem. mfd.

$\iff \Omega|_{T_pN} =$ (M, g) から N に induce される metric の volume form.

(Ω が calibrated $\Rightarrow \leq$)

例 M: Kähler $\quad \omega^{k/2}$

cal

cpx mfd $\iff$ Calibrated mfd.

<u>Prop</u> N が Calibrated smf.

$[N'] = [N]$ homologus

$Vol(N) \leq Vol(N')$

特に N は minimal s.m.f

ホモロジーの $d\Omega = 0$

$Vol(N) = \int_N \text{Volumeform} = \int_N \Omega = \int_{N'} \Omega \leq \int_{N'} \text{Volumeform}$ $\quad = Vol(N')$ //

極小曲面の方程式 : 2階 へんびぶん $\rightarrow$ Calib 1階 非せんけい

(ASD) 2階 $\rightarrow$ selfdual 1階

M^{2n} : Calabi-Yau　　Ω : holo n-form.

$\mathrm{Re}\,\Omega$ を calibration にとる。

<u>lemma</u>　$N^n \subset M^{2n}$ が calibrated

$\Leftrightarrow \omega|_N = 0 \quad \mathrm{Im}\,\Omega|_N = 0$

kähler.

<u>Def</u>. N が special Lag. sub

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega|_N = 0 \\ \mathrm{Im}\,\Omega|_N = 0 \end{cases}$$

susy
k symetry
を保つ条件になる

やりたいこと

問題　$L \subset M^{2n}$ が stable を $\boxed{\text{定義}}$して.

stable $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Hom}(M)$

$\varphi(L)$ は special Lag

ある(かも)

を示せ

Thomas のろんぶん.

ストロミンジャー・ヤウ・ザスロー

HMS の立場からみた SYZ の proposal

M : sym mfd　　$M^\vee$: cpx mfd

L : Lag.　$\longleftrightarrow$　$\mathcal{E}$: $M^\vee$ 上の coherent sheaf

($D(M^\vee)$ の object)

$\mathcal{L} \to L$　flat $U(1)$ bdl.

stable　$\longleftrightarrow$　stable

★ これが正しいとすると、M から $M^\vee$ をつくる作り方が見えてくる。

(HMS?)

・M だけ知っている。とする

$p \in M^\vee$

↓

sky scraper sheaf $\mathcal{F}_p$

$$\mathcal{F}_p(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & p \in U \\ 0 & p \in U \end{cases}$$

これは stable.

$\mathcal{L}_p \to L_p^n \subseteq M^{2n}$

L_p Lag. smfd $\longmapsto \mathcal{F}_p$

L_p は special Lag smf ととれる。

$$HF(L, L') = \mathrm{Ext}(\mathcal{E}(L), \mathcal{E}(L'))$$

$HF(L, L) \doteqdot H(L)$ の量子変形

$H^*(L_p) = HF(L_p, L_p)$ と仮定してみる.

$= \mathrm{Ext}(\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_p)$

$= H^*(T^n)$

$p \neq q \Rightarrow \mathrm{Ext}(\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_q) = 0$.

$HF((L_p, \mathcal{L}_p), (L_q, \mathcal{L}_q))$

$\|$

$L_p = L_q$
$\|$
$L = T^n$

$H(L, \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_q)) = 0$

flat bdl として ちがえば.

$L_p \cap L_q = \phi \Rightarrow HF((L_p, \mathcal{L}_p), (L_q, \mathcal{L}_q))$

<u>予想</u> : $L_p \cap L_q = \phi$ or $L_p = L_q$ (かつまたは $\mathcal{L}_p \neq \mathcal{L}_q$)

No. 27

Date. . .

$M = \bigcup_p L_p$ disjoint L_p SL subf.

$L_p \hookrightarrow M \longrightarrow B$　　L_p たちが fiber になる。

$\curvearrowleft s$

・ $H^*(B) = H(S^n)$

HMSを仮定すると正しい
この([illegible]

・ $\exists s : B \to M$

$M^\vee$ 上の str. sheaf $\mathcal{O}_{M^\vee}$

$$\mathrm{Ext}^k(\mathcal{O}_{M^\vee}, \mathcal{O}_{M^\vee}) = H^{0,k}(M^\vee) \underset{\uparrow}{=} \begin{cases} \mathbb{C} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases} = H^k(S^n, \mathbb{C})$$

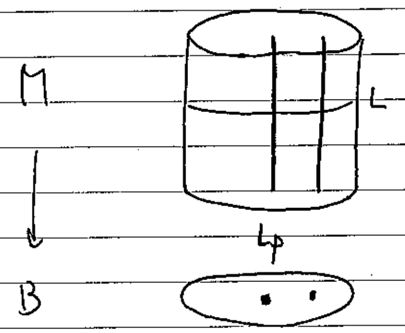
cf. Y の def

$L \subset M$ sLs

$H(L) = H(S^n)$

$L \rightsquigarrow \mathcal{O}_x$

$$\# (L \cap L_p) \doteqdot \mathrm{rk}\, HF(L, L_p)$$
$$= \mathrm{rk}\, \mathrm{Ext}(\mathcal{O}_x, \mathcal{F}_p)$$
$$= 1$$



No. 28

Date. . .

$$\begin{array}{l} M \xrightarrow{\pi} B \\ \cup \\ L \end{array}$$

$\pi|_L : L \to B$ homeo

$\therefore H(B) = H(S^n)$

$\pi|_L$ の逆が $\pi : M \to B$ の section.

$\boxed{\text{SYZ}}$

$M^\vee \ni p \longmapsto x \in B$

$M^\vee \longrightarrow B$ map.

$$\begin{array}{ccc} M & & M^\vee \\ & \overset{\pi}{\searrow} \quad \overset{\pi^\vee}{\swarrow} & \\ & B & \end{array}$$

B $\|$ homology S^n　(singular fiber がある。)

・ この2つの fibration の関係.

$x \in B$

$p \in \{ p \in M^\vee \mid \pi^\vee(p) = x \} = \pi^{\vee -1}(x)$

$\rightsquigarrow \mathcal{L}_p \to L_p = \pi^{-1}(x)$

$p \in \pi^{\vee -1}(x)$

$\mathcal{L}_p \longrightarrow \underset{\underset{L_x = L_p}{\|}}{\pi^{-1}(x)}$

$p \neq q \in \pi^{\vee -1}(x)$

$\mathcal{L}_p \neq \mathcal{L}_q$

$$\pi^{\vee -1}(x) \subset \{ \mathcal{L} \to \overset{T^n}{\underset{\underset{L_x}{\|}}{L_x}} \mid \mathcal{L} : \text{flat } U(1) \text{ bdl} \}$$

次元をかぞえると一致

$\boxed{\pi^{\vee -1}(x) \text{ は } \pi^{-1}(x) \text{ の dual torus}}$

No. 29
Date.

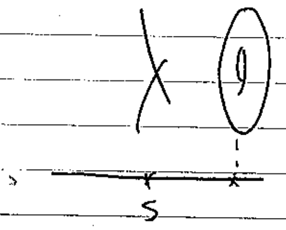
- fiber は SLS
- section
- fiber の torus のどうしは dual torus

10年前の picture
実はまちがっていたことがわかった

● Special-Lag fibration は本当にあるか？ Gross Joyce

M
$\downarrow$ T^n fib
$B \setminus S$ ad $S=2$

singular fiber の近くで local に SLF をしらべていた。



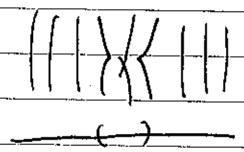
fiber の大きさ $\varepsilon \to 0$

$B - U(S)$ 上では

$M \doteqdot (B - U(S)) \times_{\varepsilon} T^n$

$\varepsilon \to 0$ 直積.

ε を fix すると S のある近傍には SLF はのびない



$\varepsilon \to 0$ で $U_\varepsilon(S) \longrightarrow S$

● Lag-fibration は全体にある。

W.P. Pinam AMS/IP Winter school ---
Zarkhov alg geom 9806091

・$M \subset X'$ toric hypersurface

$M \subset Y$, Lag torus fibration を作る

No. 30
Date.

● $M \xrightarrow{\pi} B \supset U \supset S$ Lag. fibration

x が S に近く

$L_x = \pi^{-1}(x)$ $\Phi(L_x)$ SL sub は ダメであろう.

$\mathcal{L} \longrightarrow L_x$ flat $U(1)$
$\downarrow$
$p \in M^\vee$ の点

$\mathcal{O}_p$ sky scraper sheaf $\to$ stable

なのに どこかで stable.

stability を Derived object の圏で考える。

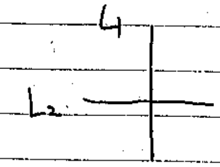
(π-stable Douglas)

(ε とにはstableになる? $D(M^\vee)$ の元としては stable でないということがおこる。)

Thomas (Lag stability の提案)

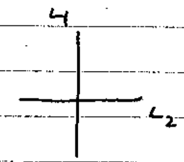
$L \rightsquigarrow L_1 \# L_2$ unstable.
ちぎれる

$L_1, L_2 \subset M$,
Lag submfd $L_1 \cap L_2 = $ 一点



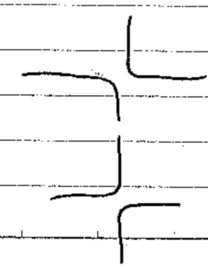
$L_1 \# L_2 \subset M$: Lag として決まる。

直結和
2種類



①

②



$xy = \varepsilon$

$xy = -\varepsilon$

No. 31

Date.

① $E_1 \to E \to E_2$ ② $E_2 \to E \to E_1$

· Maslov index.

$\mu : \pi_1(L) \to \mathbb{Z}$

$c_1 = 0$

L_1, L_2 について. $\mu \equiv 0$

($\mu \equiv 0 \Rightarrow HF$ が $\mathbb{Z}$ graded)

(special Lag $\Rightarrow \mu = 0$)

$L_1 \# L_2$ 一般には $\mu = 0$ は保たれない。それを $L_1 \# L_2$ とする。

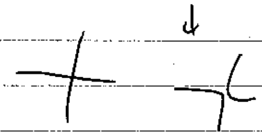
Conj $^\forall L'$

$$\begin{array}{ccc} HF(L', L_1) & \longrightarrow & HF(L', L_2) \\ \nwarrow & Q & \swarrow \\ & HF(L', L_1 \# L_2) & \end{array}$$

Rem $L_1 = S^n$

$L_1 \# L_2 = \tau_{L_1}(L_2)$

デーンツイスト



subsheafとしては いみなくて exact triangle だけがくこある

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(L_1) & \longrightarrow & \mathcal{E}(L_2) \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & \mathcal{E}(L_1 \# L_2) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & L_1 \# L_2 & \end{array}$$

これだけでは たりない?

$E \supset {}^\forall E'$ $\mu(E') < \mu(E)$

$$\mu(E) = \frac{\int c_1(E) \wedge \omega^n}{\mathrm{rk}\, E} \ ? + \text{量子効果}$$

ミラーで対応.

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\, L} \int_L \mathrm{Re}(e^{i\theta} \Omega) = \mu(L)$$

数と何かが? → stab

slope, subLag ⇒ "

わからん

(マゾッコの Picardをジャジーの所からぶんでみる (monodromy map)
フックスのは皆のさんにきけばよい。)

No. 1

Date. 2002・9・11

大山陽介氏

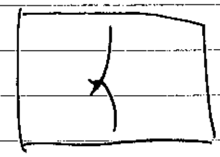
フロベニウス構造と一般超幾何方程式

フロベニウス ⟷ モノドロミー保存変形

"モノドロミー保存変形"

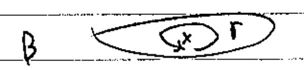
・local.

この School でよくでてくる



$H^n(F,\mathbb{C})$ ∋ ω まわってくるもの

⟶ モノドロミー



$\int_\gamma \omega$

Form ↔ Picard Fuchs eq のモノドロミーは?

$$\nabla = \frac{d}{dx} - A(x)$$

$A(x)$: $n\times n$ 行列。x_0 で特異点。

$$\nabla \Phi = 0$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi C$$

C: 定数行列 (モノドロミー行列)

・global なものを考える。

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^k \ni (x, t)$

$\downarrow$

$B = \mathbb{P}^1$, (Σ ないこともあるらしい)

~~(判読不能)~~ $t = (t_1 \cdots t_k)$ をとてもの…

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\Phi = A(x,t)\Phi \quad (*) & (A(x,t) : \text{rat}^l \ n\times n) \\ \dfrac{\partial}{\partial t_i}\Phi = B(x,t)\Phi & B \quad " \end{cases}$$

・可積分条件は大事。→ 両も条件.

・compatible (integral)

⟹ t がかわっても (*) のモノドロミーがかわらない。

(附. Proof. ... L. Fuchs)

No. 2

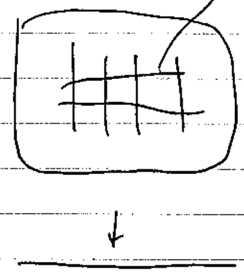
Date.

$\mathbb{P}^1$ がたくさんあるのが大事.

∇の...集合

例

M, ∇



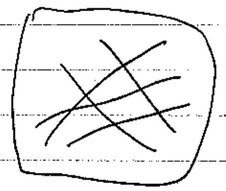
$\mathbb{P}^1$ fibration

⇝ M-保存変形.

B

例

$M = \mathbb{C}P^n$



$\mathbb{P}^1$ a family.

$\nabla|_{\mathbb{P}^1}$ ⇝ M-保存変形.

§2. フロベニウス構造.

$$\left(M, \quad \begin{array}{l} \eta_{ij} : \text{flat metric} \\ * \quad 積 \\ e. \quad 単位元 \\ \mathcal{E}. \quad \text{grading op (grading を表わす)} \\ \quad \text{with } \mathcal{E} \text{ の公理} \end{array} \right) : \text{Frobenius mfd.}$$

〈目標〉. $\boxed{\text{Frobenius mfd} \Longleftrightarrow \text{(ある特殊な) モノドロミー保存変形}}$

一般超幾何. "Okubo の意味"

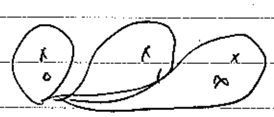
"Okubo の意味" のイミ

$$(x-B)\frac{d}{dx}\Phi = A\Phi$$

B: 対角行列

2×2 のとき Gauss の超幾何

→ モノドロミー群の計算可



Gauss

connection

多価 fct の branch をとるのが大変

… に一般に、計算してみると大いに違う。

No. 3

Date.

<u>Lemma</u> ∇: flat metric.

$\nabla(z)$: deformed connection.

$$\nabla_u(z)v = \nabla_u v + z\, u * v \qquad z \in \mathbb{C}$$

$\nabla_u(z)$ は flat.

$*$ (flat $\Leftrightarrow$ $*$ は associativity) //

∴ $\nabla(z)$ を

例 $M \times \mathbb{C}$ の connection に広げたい。 ← さりと2行ノートにもある.

$$\nabla : TM \to TM \otimes \Omega^1_M, \quad Z = M \times \mathbb{C}$$

$$\hat{\nabla} : TZ \to TZ \otimes \Omega^1_Z$$

これを決めればよい。
$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\nabla}_{\frac{d}{dz}}, \\ \hat{\nabla}(\frac{d}{dz}) \end{array} \right.$

$$\hat{\nabla}_u\left(\frac{d}{dz}\right) = 0$$

$$\hat{\nabla}_{\frac{d}{dz}}\left(\frac{d}{dz}\right) = 0 \qquad \left(\tfrac{d}{dz} \text{ の conn mat が } * \text{ がじてこない。}\right)$$

flat になるように def したい。

$$\hat{\nabla}_{\frac{d}{dz}} u = \partial_z(u) + \mathcal{E} * u + \frac{1}{z}\nabla_u \mathcal{E}$$

<u>命題</u> $\hat{\nabla}$ は $M \times \mathbb{C}$ の flat conn.

手でつくったみたいだけどあるいみしぜん？

<u>Rem</u>. η_{ij} : flat metric. flat metric.

(⟷ $\langle\, ,\rangle$ で表す。)

Intersection form. → new metric $(\, ,\,)$ を定める.

$$(\mathcal{E} * u, v) := \langle u, v\rangle \qquad \text{(well def.)}$$

$\mathcal{E}$ の作用素の逆が必要とされることも、いわれているけど。

$\Rightarrow$ $(\, ,\,)$ も flat.

$z(\, ,\,) + \langle\, ,\,\rangle$ も flat. $\forall z$.

重要な事実

ふたたび 常ビブンeq.

※ z 方向に制限して考える。

$$\left(\frac{d}{dz} + \underset{\text{A}_\varepsilon}{A} + \frac{B}{z}\right)\Phi = 0$$

∇ 1/z 情報

技術的 $\boxed{A\text{ の固有値は distinct}}$

一致すればない Thomae の方法 $z^{\frac{1}{2}}$で展開

$z=0$ type 0 ($\Leftrightarrow$ reg. sing)

$z=\infty$ type 1 ($\Leftrightarrow$ Poincaré rk 1)

なんでう? とは逆 0200年

(逆?) isomonodromy condition.

$\Rightarrow$ Frob. mfd を再構成できる。(semi simple)

対応.

def

- Frob. algebra

どこの名? fiberの fibrationを考えるの? (各) T_xM 上 $\langle\,.\,\rangle$ が入っている alg. $(x\in M)$

$\langle a*b, c\rangle = \langle a, b*c\rangle$

Frob. alg が semisimple $\leftrightarrow$ nilpotent element がない

$x^n=0 \Rightarrow x=0$

open condition.

Lemma

M: semi simple Frob mfd. $\left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}\right)$

$\Rightarrow \exists u=(u_1,\cdots,u_n)$ $\partial_i * \partial_j = \delta_{ij}\partial_i$

Def. この $u=(u_1,\cdots,u_n)$ のことを canonical coordinate という。

Lemma (1) u: canonical coordinate

$\Rightarrow$ $\varepsilon = \sum u_i\partial_i$

$e = \sum \partial_i$

これはずいぶう ともわかればよい。

$\langle\partial_i, \partial_j\rangle = \eta_{ii}(u)\delta_{ij}$

$g^{ij} = u^i\eta_{ii}^{-1}\delta_{ij}$

new metric intersection form

なんでこんなんができてきたん?

(2) $u^1,\cdots,u^n$ ← (上ったにする) って言ってたけどまたもとにもどってる。

$\det(g^{ij} - u\,\eta^{ij}) = 0$ の根.

(具体) $n=3$ のとき Painlevé VI 型 eq になる。

▷ o Darboux-Egoroff ~~coefficient~~ の rotational coefficient

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial_j\sqrt{\eta_{ii}}}{\sqrt{\eta_{jj}}} \quad (i\neq j)$$

なんかの可積分条件

命題: D-E system.

$$\begin{cases} \partial_k\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\gamma_{kj} & (i,j,k \text{ は distinct}) \\ \left(\sum_{k=1}^n \partial_k\right)\gamma_{ij} = 0 & e\gamma_{ij}=0 \\ \sum u^k\partial_k\gamma_{ij} = -\gamma_{ij} & \varepsilon\gamma_{ij} = -\gamma_{ij} \end{cases}$$

WDVVだとわかりにくいけど こっちだとスッキリ!

(注) D-E は 次の L.D.Eq の可積分条件.

$$\begin{cases} \partial_k\psi_i = \gamma_{ik}\psi_k \\ \sum\partial_k\psi_i = 0 \end{cases} \quad (\psi_1\cdots\psi_n)$$

$V = [\Gamma, U]$ $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $\gamma_{ii}=0$, $U = \mathrm{diag}(u_1\cdots u_n)$

$$D\text{-}E \Leftrightarrow \partial_k V = [V, [E_k, \Gamma]]$$ ← オイラーのコマ → ハミルトン系

$$E_k = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \; (k)$$

($u_1 \sim u_2$ について $u_i \mapsto au_i + b$ をほどこして,)

($n=3$) $S = \frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}$ とおく。 normalize.

パンルベの時間

つづく

No. 6
Date. . .

$\Omega_i = -V_{jk}$ (i,j,k) は cyclic distinct.

$H := \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1^2}{s-1} + \frac{\Omega_2^2}{s}\right]$

$\boxed{\Longleftarrow\ n=3 \text{ の D.E system} \iff \frac{d\Omega_i}{ds} = \{\Omega_i, H\}}$

so(3) の Poisson bracket

$\{\Omega_1, \Omega_2\} = \Omega_3$ (cyclic)

オイラーのコマ +α

$$\begin{cases} \frac{d\Omega_1}{ds} = \frac{1}{s}\Omega_2\Omega_3 \\ \frac{d\Omega_2}{ds} = -\frac{1}{s-1}\Omega_1\Omega_3 \\ \frac{d\Omega_3}{ds} = -\frac{1}{s(s-1)}\Omega_1\Omega_2 \end{cases}$$

だいいちせきぶん $\Rightarrow$ $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = -k^2$

$\Rightarrow P_{VI}\left(\frac{(1-2k)^2}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$

(P_{VI} と Frob のかんけい)

$\left(\frac{d}{dz} + A + \frac{k}{z}\right)\Phi = 0$ $\Phi \to {}^{\exists}P\,\tilde{\Phi}$

$A \to \mathrm{diag}\begin{pmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{pmatrix}$

$\Phi = z\int e^{z\lambda}\Psi(\lambda)\,d\lambda$: Fourier-Transform.

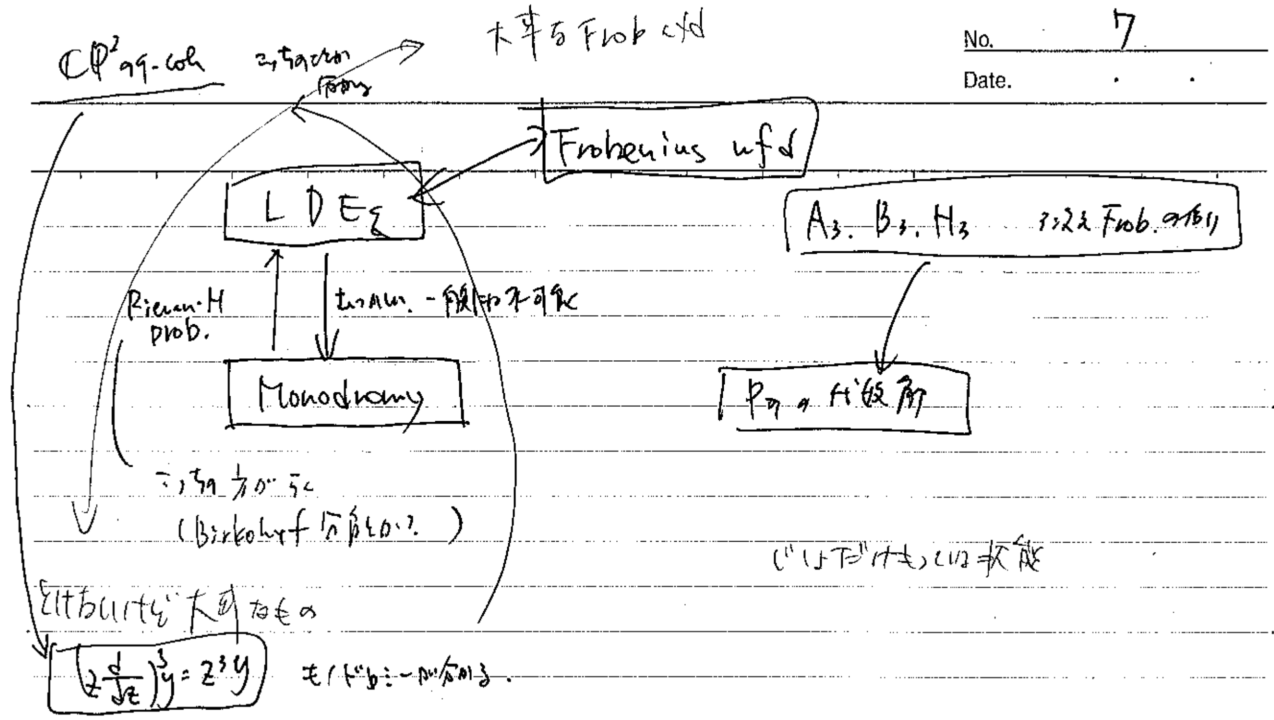
えんかくもんだい

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d\Psi}{d\lambda} + \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\lambda+u_i}\Psi = 0}$ $\rightsquigarrow P_{VI}$ ([illegible] ⇔ 確定特異点, 階級 ⇔ order)

n=3のとき → 第1成分, 第3成分が不変 → 2×2 に red.

Okubo の一般超幾何. (モノドロミー計算できる)

No. 7
Date. . .



Ref. Dubrovin. • Painlevé property.
• SLN. 1620.

S-3

No. 17

Date. 2002・9・12　齋藤氏

モノドロミー保存変形とフロベニウス構造 III

・Frobenius mfd

・ある種の Variation of Mixed Hodge str.
$\Rightarrow$ Frobenius mfd が作れる.

MHSの例

X: a CY 3fold $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ① X: proj cpx mfd of dim 3 ② $K_X = \mathcal{O}_X \Leftrightarrow \exists\omega$: hol 3form いたるところ0にならない ③ $\dim H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $1 \le i \le 2$

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{pq}(X), \quad \overline{H^{pq}(X)} = H^{qp}(X)$$

$\mathbb{C}$ tensor $\cup$ $H^k(X, \mathbb{R})$ $\qquad H^{pq}(X) \simeq H^q(X, \Omega^p_X)$

Hodge 分解.

$$h^{pq} = \dim H^{pq}(X) \qquad K_X = \Omega^3_X = \mathcal{O}_X$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{00} & & & \\ & & h^{10} & & h^{01} & & \\ & h^{20} & & h^{11} & & h^{02} & \\ h^{30} & & h^{21} & & h^{12} & & h^{03} \\ & h^{31} & & h^{22} & & h^{13} & \\ & & h^{32} & & h^{23} & & \\ & & & h^{33} & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{11} & & 0 & \\ 1 & & h^{21} & & h^{12} & & 1 \\ & 0 & & h^{22} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$h^{10} = 0$, $h^{01} = 0$

$$b_3 = \boxed{h^{30} + h^{21} + h^{12} + h^{03}}$$

Serre dual
$H^{pq} \otimes H^{3-p, 3-q} \to \mathbb{C}$ nondeg

$$h^{11}(X) = \dim H^1(X, \Omega^1_X) = \dim H^2(X, \mathbb{C})$$: number of Kähler moduli

$$= \bigoplus_{i=1}^{h^{11}} \mathbb{C}[D_i] \qquad D_i: \text{hyper surfaces in } X.$$

$$h^{21}(X) = \dim H^1(X, \Omega^2_X)$$

X: CY $\quad \Omega^2_X \otimes \Omega^1_X \to \Omega^3_X = \mathcal{O}_X$ non deg

$\Omega^2_X \simeq (\Omega^1_X)^\vee = \Theta_X$: Tangent sheaf

No. 18

Date. ・ ・

・Kodaira - Spencer

$H^1(X, \Theta_X) = \{ X$の complex str の inf. deformation $\}$

$\theta \longleftrightarrow$ un obstructed (Tian, Kawamata - Namikawa)

・$h^{21} = b$ とおく.

Kuranishi family

$\exists$ semiuniversal family of CY 3fold

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \supset & X \\ \downarrow f & & \downarrow \\ \mathbb{C}^b \supset B^b & \ni & 0 \end{array}$$

f: smooth proj family

$B^b = \{(z_1, \cdots, z_b) \mid |z_i| < \varepsilon\}$, $\exists \varepsilon > 0$

$$\rho: T_0(B^b) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \Theta_X)$$
$$\theta \longmapsto \rho(\theta)$$

$z \in B^b$, $f^{-1}(z) = X_z$: CY 3fold
X_0 の deformation.

・X: singular CY

$X = \{ x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \} \subset \mathbb{P}^4$ ← こちらの方が大事

~~X': normal crossing CY 3fold~~
d-semi stable

smooth 5次超曲面

$$\begin{array}{ccc} X_z \subset \mathcal{X} & \supset & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ z \in B^b & \ni & 0 \end{array}$$

flat proj family of CY 3fold

∵ un obstructed thm (Kawamata-Namikawa)

No. 19

Date. . .

zをうごかしても次元はかわらない。

- $b = h^{21}(X)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & z \in B^b & X_z = f^{-1}(z) \\ f \downarrow & & \\ B^b & & H^3(X_z, \mathbb{C}) = H_z^{30} \oplus H_z^{21} \oplus H_z^{12} \oplus H_z^{03} \end{array}$$

b次元 complex Ball germ.

CPX analiticには変化しない。

$F_z^3 \subset F_z^2 \subset F_z^1 \subset F_z^0$

$F_z^p = \bigoplus_{k \geq p} H_z^{k, 3-k}$: zに関してhol.に変化する。

$\mathbb{H} = \bigcup_{z \in B^b} H^3(X_z, \mathbb{C})$: local system on B^b

$\mathcal{H} = \mathcal{O}(\mathbb{H})$: sheaf locally free $\mathcal{O}_B$-module.

$\mathcal{H} = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \mathcal{F}^2 \supset \mathcal{F}^3 \supset \mathcal{F}^4 = 0$;

$\mathcal{H}$ の hol locally free $\mathcal{O}_B$-submodule

decreasing filtration
減少…

(localsystem)?

$\nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega_B^1$: flat connection.

s.t. $\ker \nabla = \mathbb{H}$ $\quad \nabla \gamma_i = 0$

$\gamma_i \in \mathbb{H}$ base

$\mathcal{H} = \oplus \mathcal{O}_B \gamma_i$

$\nabla(f_i \gamma_i) = df_i \otimes \gamma_i + f_i \underbrace{\nabla \gamma_i}_{0} = df_i \otimes \gamma_i$
(f_i hol)

- Griffith Transversality

$\nabla(\mathcal{F}^p) \subset \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega_B^1$

はじめからあがらない?

No. 20

Date. . .

$(\mathbb{H}, \nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega_B^1, \{\mathcal{F}^\bullet\})$

Variation of Hodge str of wt 3.

associated to $f : \mathcal{X} \to B^b$

$$\bigoplus_{p=0}^{3} \mathcal{F}^p / \mathcal{F}^{p-1} = \mathcal{F}^0/\mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{F}^1/\mathcal{F}^2 \oplus \underbrace{\mathcal{F}^2/\mathcal{F}^3}_{\text{rank} = h^{21} = b} \oplus \underbrace{\overbrace{\mathcal{F}^3/\mathcal{F}^4}^{\mathcal{F}^3}}_{\text{rank } 1}$$

$\mathcal{F}_z^3 \cong H^0(X_z, K_{X_z}) = \mathbb{C}\omega_z$ hol 3-form.

$\omega = \bigcup_{z \in B^b} \omega_z$

$\mathcal{X}$ 上の hol 3 form $\quad \omega|_{X_z}$: X_z で消えない

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$

$\nabla : \mathcal{F}^p \to \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega_B^1$

$\nabla_{\partial_i} : \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p-1} \to \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p$ $\quad \mathcal{O}_B$-linear bdl map.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^3 & \longrightarrow & \mathcal{F}^2/\mathcal{F}^3 \\ \omega & \longmapsto & \nabla_{\partial_i}\omega \end{array}$$

$i = 1, \dots, b = h^{21}$

Claim: $\nabla_{\partial_i}\omega$ $\quad i = 1, \dots, b$ generate $\mathcal{F}^2/\mathcal{F}^3$

- $H^1(X_z, \Theta_{X_z}) \cong T_z(B^b) \otimes \omega \xrightarrow[\lrcorner\omega]{\sim} H^{12}(X_z)$

- $\mathcal{F}^3 \to \mathcal{F}^2/\mathcal{F}^3 \to \mathcal{F}^1/\mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^0/\mathcal{F}^1$ $\quad$ CY n-foldでは成り立っている。

$\omega \qquad \nabla_{\partial_i}\omega \qquad \underbrace{\boxed{\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\omega}}_{\text{generate}} \qquad \underbrace{\boxed{\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\omega}}_{\text{generate}}$

• <u>Weight filtration</u> of VHS

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{z \in B^b} H^3(X_z, \mathbb{Q}) = R^3 f_* \mathbb{Q}_{\mathcal{X}}$$

↖ イニチキ

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Q}} \supset \cdots \supset W_k \supset W_{k-1} \supset \cdots \supset$$

incleasing Filtration of $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$

$W_k \to B^b$: local system of $\mathbb{Q}$ vect field （一般的定義がある。$\{\mathcal{F}^p\}$, $\{W_k\}$ がどうからむか？）

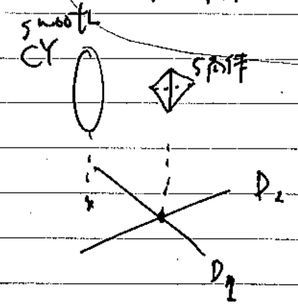
$W_k / W_{k-1} = Gr_W^k(\mathbb{H}) \cdots$ ついて以下わかりよう

$\mathcal{X} \supset X'$

$\downarrow \quad \downarrow$

$z \in B^b \ni 0$

$\overset{\shortparallel}{\prod_{i=1}^b D_i}$ maximally unipotent pt.



$D_i = \{|z_i| < \varepsilon\}$ $\quad D_i^* = D - \{0\}$

$$\pi_1(D_i^*, z) \to \mathrm{Aut}(H^3(X_z, \mathbb{Q}))$$

generator $\gamma_i \longmapsto T_i$

$N_i = T_i - \mathrm{Id}$ $\qquad N = \sum x_i N_i \quad x_i \geq 0 \ (x_i \in \mathbb{Q})$

quasi unip だが unipotent と仮定． $\qquad N^3 \neq 0, \ N^4 = 0$ $\qquad \in \mathbb{R}$ にするとHの中のfiltrationも保たなければいけない。

$$N W_k \subset W_{k-2}$$

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = W_6 \supset W_5 \supset W_4 \supset W_3 \supset W_2 \supset W_1 \supset W_0 \supset W_{-1} = 0$$

$$N^3 \ W_6/W_5 \xrightarrow[\simeq]{N^3} W_0/W_{-1} = W_0$$

$$W_5/W_4 \xrightarrow[\simeq]{N^2} W_1/W_0$$

$$W_4/W_3 \xrightarrow{N} W_2/W_1$$

monodromy weight filtration

Smoothでないので

$(\mathbb{H}, \nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega^1_{B^b}(\log Y), \{\mathcal{F}^p\})$ $\quad Y_i = \{z_i = 0\}$, $Y = \bigcup_{i=1}^b Y_i$ $\quad$ B^b上にbdlがのびた $\quad Y = \cancel{\prod_{i=1}^b D_i \setminus \prod_{i=1}^b D_i^*}$

(polaized)

$(\mathbb{H}, \nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega^1_{B^b}(\log Y), \{\mathcal{F}^p\}, \{W_k\})$: Variation of MHS.

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}_{B^b} \quad \text{polaization}$$

$$(a_1, a_2) \longmapsto S(a_1, a_2) = \int_{X_z} a_1 \wedge a_2 \quad \text{cup積}$$

Sは$\mathbb{H}$上flatな非退化2次形式

$$S(a_2, a_1) = -S_W(a_1, a_2) = (-1)^W S(a_1, a_2)$$

（バラニコフ タニトピッチ → wt filtを大きく(?)にうごかす
(Hodg str をかえないで)）

今の場合（maximally unipotent かつ wt 3）

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = \underbrace{W_6 \supset W_5}_{1} \supsetneq \underbrace{W_4 \supset W_3}_{b} \supsetneq \underbrace{W_2 \supset W_1}_{b} \supsetneq \underbrace{W_0 \supset W_{-1}}_{1}$$

• 今、$B = \prod_{i=1}^b D_i$

$D_i = \{|z_i| < \varepsilon\}$ $\quad$ εを十分小さくとれば

$^\forall z \in D$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{F}^p \oplus W_{2(p-1)} \\ &\simeq \mathcal{H} \qquad ({}^\forall p) \end{aligned}} \quad (W_k = W_k \otimes \mathcal{O}_B)$$

def. $\{\mathcal{F}^{\cdot}\}$, $\{W_{\cdot}\}$ が opposit filtration

$\mathcal{O}_M$ tensor すると.

$M \to B$

$\mathbb{K} = \mathbb{H}$

Hertling & Manin math AG/0207089

Thm. 5.6 次の(α)と(β)の間に一対一対応がある。

Frob mfd. ⟸ (a) $((M,o), \mathbb{K}, \nabla, C, \mathcal{U}, V, g)$ Saito str.

cpx mfd の germ | flat conn. $\overset{\shortparallel}{\Phi}$ $\overset{\vee}{\Phi}(\varepsilon)$ $\overset{\vee}{\nabla}\varepsilon$

local system on M.

⇕

Frobenius type str with cond $\boxed{(IC)(GC)(EC)}$

(b) $((M,o), \mathbb{K}, \nabla, \{\mathcal{F}^\cdot\}, \{W_\cdot\}, S, w)$

H^2-generated variation of MHS with oposite filtration.

$C: T_oM \hookrightarrow \mathbb{K} \otimes \mathcal{O}_M$ $\exists \zeta \in \mathbb{K}$

$X \longmapsto C_X \zeta$ 各々の条件をみたす

こちらうって flob. str をかく。

$(C_X C_Y C_Z \ \zeta)$, $\mathcal{U}\zeta$: $\mathbb{K}$ を generate する。

H^2-generated VMH.

$\mathcal{F}^w \subset \mathcal{F}^{w-1} \subset \mathcal{F}^{w-2}$

$\quad 0 \qquad \mathrm{rk}\, 1 \qquad \mathrm{rk} = \dim M + 1$

おもなのは $w=4$ $\mathcal{F}^3 \subset \mathcal{F}^2$

$\quad \mathrm{rk}\, 1 \qquad \dim \beta^5 + 1$

Griffiths tr を仮定

$\nabla_X : \oplus \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p-1} \to \oplus \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p$

$\exists \omega \in \mathcal{F}^{w-1}$

$\nabla_{X_1} \cdots \nabla_{X_k} \omega$: generates $\mathbb{K} \otimes \mathcal{O}_M$.

バラニコフ. Kontsevich

CY の total coh

$$H^*(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p,q} H^p(X, \bigwedge^q \Theta_X) = H^{even} \oplus H^{odd}.$$

(F^p) fix した filter をいれる。 ちがうらしい。?

- Sabbah のアイデアによい。(証明はできるそう) まちがっている。

$W=4$

$\mathcal{H} = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \mathcal{F}^2 \supset \mathcal{F}^3 \supset \mathcal{F}^4 = 0 \cdots$

$\quad \shortparallel\ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-2} = \cdots$

$\downarrow$

M

$(W_6^{\text{おまけ}})$ $\qquad 0$

$H = W_3 \supset W_2 \supset W_1 \supset W_0 \supset W_{-1} = W_{-2} \cdots$

$\downarrow$ $\qquad \mathcal{F}^p \oplus \mathcal{W}_{p-1} = \mathcal{H}$ $\qquad \mathcal{W}_k = W_k \otimes \mathcal{O}_M,$

M $\qquad$ opposite filt.

$\mathbb{P}^1 \times M$ $\qquad \mathbb{C} \times M$

$\cup$

$\mathbb{C} \times M$ $\qquad \mathbb{F} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^p z^{-p}$

z $\qquad C$

$z\mathbb{F} = \mathcal{F}^3 z^{-3} \oplus \mathcal{F}^2 z^{-2} \oplus \mathcal{F}^1 z^{-1} \oplus \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F} z^{+} \cdots$

$\mathcal{O}_M[z]$-module. $\quad = \quad \mathcal{F}^3 z^{-2} \oplus \mathcal{F}^1 z^1 \oplus \cdots$

$h \in \mathbb{F}$ $\qquad \zeta \in TM$ $\qquad$ pole.

$$h = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} h_p z^{-p} \qquad \nabla_\zeta h := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\nabla_\zeta h_p) z^{-p} = \Big(\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\nabla_\zeta h_p) z^{-p+1}\Big)\frac{1}{z}$$

$\mathbb{C}$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} h := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} p h_p z^{-p-1} = \big(\oplus(-p\, h_p) z^{-p}\big)\frac{1}{z}$$

z $\qquad r$

$\Rightarrow \nabla$: integrable

No. 25
Date. ・ ・

∇ $0\times M$ にそって type 1.

$W = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k z^k$: ∇ W に作用する

∇ : $\infty\times M$ regular sing, Type 0.

Claim: $\mathbb{C}\times M \cup \mathbb{C}\times M = \mathbb{P}^1\times M$
(z,x) (w,x) $w=\frac{1}{z}$

$\{F'\}$, $\{W'\}$ oposite.
$\mathbb{F}$ と $\mathbb{W}$ は張り合って.

$\hat{F} = \pi^*(\mathbb{K})$ (Sabbah)

$$\begin{array}{ccc} \hat{F} & & \\ \downarrow & & \\ \mathbb{P}^1\times M & & K \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

H^2-generation を使う.

$$TM \hookrightarrow K$$
$$X \longmapsto \nabla_X \omega$$

TM上に $\mathbb{D}$ を制限
→ Flat str?

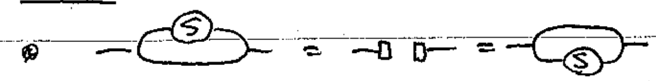
singularity のときも同様になっていて ~~flat~~ とかできる。
primitive form

No. 10
Date. 2002・9・11

加藤 斉

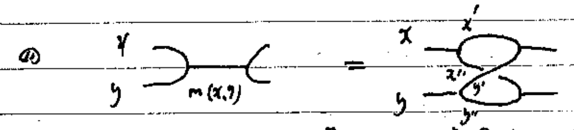
繰り込み と Hopf 代数 II.

補足 代数との対応



m: 積.

$$m(S\otimes id)\,\Delta(x) = 1\cdot\varepsilon(x) = m(id\otimes S)\,\Delta(x)$$



Sweedler の記号 $\Delta(x) = \Sigma x'\otimes x''$
$\Delta(xy) = \Sigma x'y'\otimes x''y''$

$$\begin{tikzcd} & H\otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[dl, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[dr, "\Delta"] & \\ H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dr, "id\otimes\tau\otimes id"'] & & & H\otimes H \\ & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[urr, "m\otimes m"'] & & \end{tikzcd}$$

τ: いれかえ

alg

Δ が alg hom.

Hopf alg. の例

1) $H = Map(G, \mathbb{C})$
$(f_1f_2)(g) = f_1(g)f_2(g)$ commutative.
$(\Delta f)(g_1,g_2) = f(g_1g_2)$
$\neq$
$(\tau\circ\Delta)(f)$ non cocommutative

2) 群環. $\mathbb{C}[G] \ni \sum_{x\in G} a_x x$ $(a_x\in\mathbb{C})$ メジャーといわれないけど Lie群だと拡張できる。

non commutative, 積(convolution)
$$(\Sigma a_x x) * (\Sigma b_y y) = \sum_{z\in G}\Big(\sum_{xy=z} a_x b_y\Big) z$$
$S(g) = g^{-1}$
cocommutative, $\Delta g = g\otimes g$

3) Tensor algebra. (non com. cocom.)

V: k-vect. sp. $T^n(V) = \overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{n}$

$T^0(V) = k$

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V) \hookleftarrow V$$

積: $T^m(V)\otimes T^n(V) \longrightarrow T^{n+m}(V)$

$(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)$ ( ) $\longmapsto$ (並べる)

$$\begin{cases} \Delta(v) = v\otimes 1 + 1\otimes v & v\in V. \\ \varepsilon(v) = 0 \\ S(v) = -v \end{cases}$$

とする Hopf alg str. が一意的に存在する。

$$\Delta(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = \sum_{p+q=n}\sum (v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_p})\otimes(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_q})$$

$\{i_1<\cdots<i_p\}\amalg\{j_1<\cdots<j_q\} = \{1,\ldots,n\}$. 分け方全部たしたす.

Coproductの分け方を全部についてたすのがある。

$n\{$ p q shuffle.

$$S(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = (-1)^n v_n\otimes\cdots\otimes v_1$$
$$\varepsilon(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = 0 \qquad (n\geq 1)$$

4) $U(\mathfrak{g})$: universal env. alg.
$\mathfrak{g}$: Lie alg.

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$$
$$I = \langle X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]\rangle$$

⋮

5) $U_q(\mathfrak{g})$: 量子群. non commutative, non cocommutative となる典型例.

coalg \ alg	可換	非可換
余可換	$S(V)$ sym alg.	$\mathbb{C}[G]$, $T(V)$ $U(\mathfrak{g})$
非余可換	$Map(G,\mathbb{C})$, H_R	$U_q(\mathfrak{g})$

dual になる

rooted tree の成す Hopf alg

場合のいろんなつけかたで リーくん それに関係のある主要な actしているようなことを しめしている。

6) $S(V)$
$$\Delta(x^n) = \sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!\,q!}x^p\otimes x^q$$

Thm (Milnor - Moore)
char $k = 0$

graded connected cocomutative $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$, $H_0 = k$, Hopf alg $\simeq$ Lie alg$/k$

$U(\mathfrak{g}) \leftarrow \mathfrak{g}$

カテゴリー同値

category. グラフの双対を取ってみたものが(になる?)

Prop H: Hopf alg.

① Hが commutative ($m\circ\tau = m$)

$\Rightarrow S^2 = id$ (involution.)

② Hが cocomutative ($\Delta = \tau\circ\Delta$)

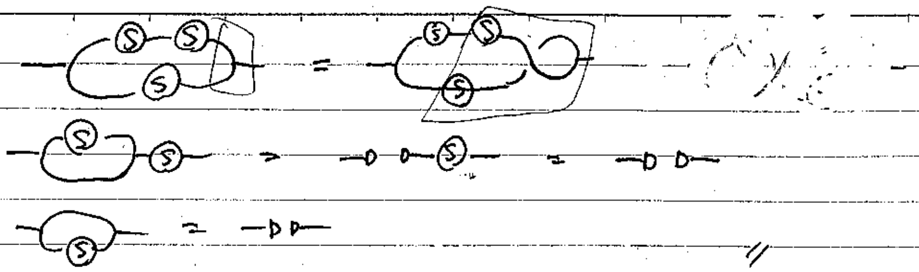
$\Rightarrow S^2 = id$.

☺ ① φ^{-1}

だし

$\varphi^{-1}(S^2) =$

$\varphi^{-1}(Id) =$



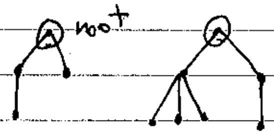
Cor: Hopf (co)commutative $\Rightarrow$ $S(xy) = S(x)S(y)$

Sは alg の homomorphism.

§ Hopf algebra on rooted tree

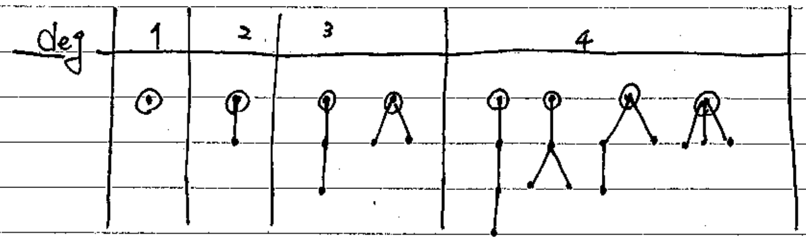
Def ◦ T : Tree

a finite, connected
simply connected
1 dim'l simp. complex.



$\deg(T) = \#(T^{(0)})$ 頂点の数. $T=(T^{(0)},T^{(1)})$

◦ rooted tree $(T, *)$ pair.

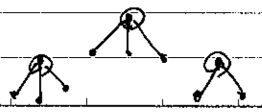


(以下 rooted tree = Tree)

Ex: deg n の rooted Treeの数を a_n とするとき.

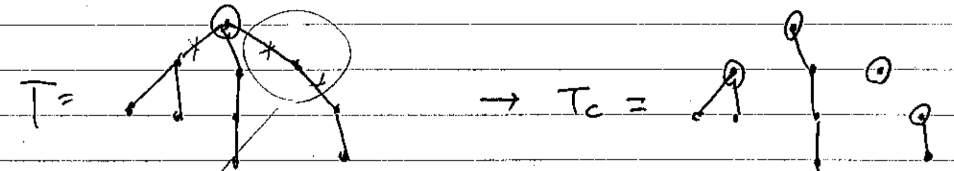
$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ を特徴づけよ。

Def: forest = Trees の disjoint union $\ni e = \phi$: empty graph.


こんなの.

◦ Tree の cut $C \subset T^{(1)}$ edge の部分集合.

$T_c = (T_c^{(0)}, T_c^{(1)})$
$:= (T^{(0)}, T^{(1)} \setminus C)$ → total deg は保つ.

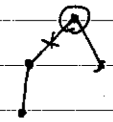


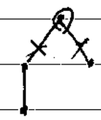
• C : cut が simple cut (admissible cut)

$\Leftrightarrow$ root $*$ と $\forall x \in T^{(0)}$ を結ぶ path は C の元を高々1つしか含まない

これはなし

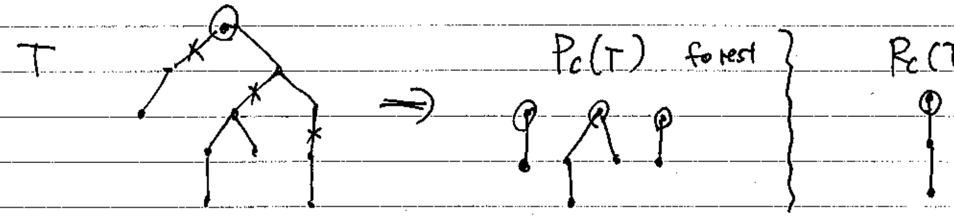
• C : elementary cut $\Leftrightarrow$ $|C| = 1$.


simple elementary


simple.

Def: T : rooted tree C : Simple cut.

$\Rightarrow$ $R_c(T) :=$ (T_c の $*$ を含む連結成分 tree) trunk 幹.
$P_c(T) :=$ (のこり) cut branch



Forest の cut も同様に def.

No. 15

Date.

$\mathcal{H}_R = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ tree は alg の生成元.

$\mathcal{H}_n :=$ polynomial algebra $/k$ generated by the symbols $\{\delta_T \mid \deg T \le n\}$

$\mathcal{H}_R$ の monomial $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Forest $\leftarrow$ vect. sp の生成元.

積：可換 $\delta_T \, \delta_{T'} = \delta_{T'} \, \delta_T$

$\mathcal{H}_R = k[\delta_{\bullet}, \delta_{|}, \delta_{\vdots}, \delta_{\Lambda}, \cdots]$

単位元 $1 = \delta_\phi = e$

<u>coproduct</u> $\Delta : \mathcal{H}_R \longrightarrow \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_R$

以下 $\delta_T = T$ とかく。

$\Delta(e) = e \otimes e$

$\Delta(T_1 \cdots T_r) = \Delta(T_1) \cdots \Delta(T_r)$

T : tree

$$\Delta(T) = T \otimes e + e \otimes T + \sum_{\substack{c:\text{simple cut}, \\ c \neq \phi \text{ nontrivial}}} P_c(T) \otimes R_c(T)$$

かことぎはなし。
$$= T \otimes e + \sum_{c:\text{simple cut}} P_c(T) \otimes R_c(T)$$

$\Delta(\cdot) = \cdot \otimes e + e \otimes \cdot$

$\Delta(|) = | \otimes e + e \otimes | + \cdot \otimes \cdot$

$\Delta(\vdots) = \vdots \otimes e + e \otimes \vdots + | \otimes \cdot + \cdot \otimes |$

$\Delta(\Lambda) = \Lambda \otimes e + e \otimes \Lambda + 2 \cdot \otimes | + (\cdot \, \cdot) \otimes \cdot$
$\doteqdot x^2 \otimes x$

No. 16

Date.

<u>rem</u>. ・ Δ は deg を保つ

・ Δ は non cocommutative

$\tau \circ \Delta \neq \Delta$

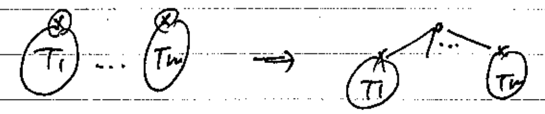
Q : Δ は coassociative か？

さこうと呼ぶ

・ B_+ , B_-

$B_+ : \mathcal{H}_R \longrightarrow \mathcal{H}_R$ deg +1 map k-linear.

$T_1 \cdots T_m \longmapsto B_+(T_1 \cdots T_m)$

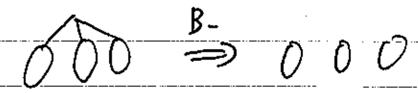


$B_- : \mathcal{H}_R \longrightarrow \mathcal{H}_R$ deg -1 . derivation.

$B_-(XY) = B_-(X)Y + X B_-(Y)$

$B_-(e) = 0$

$B_-(T)$



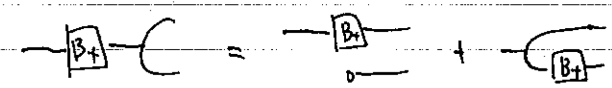
☆ $B_- \circ B_+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は id.

☆ しかし. $B_+ \circ B_- : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は $\neq$ id どっこと部分の入れかわ

ただし T: tree のとき
$B_+ B_-(T) = T$.

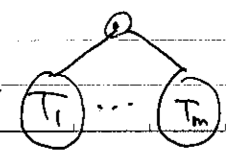
<u>Key Lemma</u>

$\Delta \circ B_+(a) = B_+(a) \otimes e + (id \otimes B_+) \Delta(a)$ $\forall a \in \mathcal{H}$



☺ $a = T_1 \cdots T_m$

$B_+(a) =$

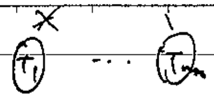


つづく

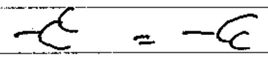
No. 17
Date. · ·

かっこをぎゅうっとひも考える

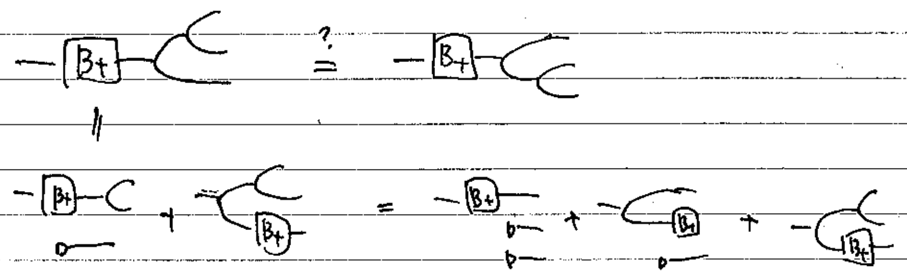
$\Delta(a) = \Delta(T_1)\cdots\Delta(T_m)$



Δの coassociativity


を示せばよい。

$T = B_+(T_1\cdots T_m)$に作用させたときに示せばよい。



§ S antipode

$S : \mathcal{H}_R \longrightarrow \mathcal{H}_R \qquad S:$ alg hom.

$$S(T) = -T - \sum_{c:\,\text{nontrivial simple cut}} S(P_c(T))\,R_c(T)$$

残された部分をひきさらにいれる

tree

recursive (再帰的)

No. 9
Date. 2002. 9. 12

高橋 仁

原始形式と位相的場の理論入門 II

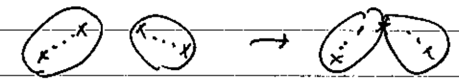
復習: CohFT on (V, η) (at $g=0$)

V: μ-dim $\mathbb{C}$-vect sp. $\qquad V = \bigoplus_{i=1}^{\mu} \mathbb{C}\gamma_i$

η: $V\otimes V \to \mathbb{C}$ non deg bilinear

$\{I_{0,n}\}_{n\geq 3} \qquad I_{0,n} : V^{\otimes n} \longrightarrow H^*(\overline{M}_{0,n}, \mathbb{C}) \qquad n\geq 3$

splitting axiom をみたす


compatibility

$\Rightarrow$ generating fct.

$$\Phi := \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n!}\int_{[\overline{M}_{0,3}]} I_{0,n}(\gamma^{\otimes n}), \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{\mu} t^i\gamma_i$$

$\circ$: product on $V\otimes\mathbb{C}[[t^1,\cdots,t^\mu]]$

$$\gamma_i\circ\gamma_j := \sum_{l=1}^{\mu} C_{ij}^{\ l}\,\gamma_l \qquad C_{ijk} := \partial_i\partial_j\partial_k\Phi$$

$$C_{ij}^{\ l} := \sum_{k=1}^{\mu} C_{ijk}\,\eta^{kl}$$

- $\circ$ は associative

$$\eta^{kl} := (\eta_{kl})^{-1}$$

Thm (Manin)

$\Psi \in \mathbb{C}[[t_1,\cdots,t_\mu]]$

such that $\circ$ associative

$\Rightarrow \exists\{I'_{0n}\}_{n\geq 3} \qquad I'_{0n} : V^{\otimes n} \longrightarrow H^*(\overline{M}_{0n}, \mathbb{C})$

CohFT の ($g=0$) の axiom をみたし

$\Psi = \Phi_{I'}$ up to quad term.

スケールをかえる $\leftrightarrow$ $\mathbb{C}^*$ action で… ??