方程式を解く

齋藤 政彦 (神戸大学理学部)

1. **方程式を立てる事、解く事**

数学において方程式は基本的な事柄である．分からない数や長さ、面積を未知数 $x, y, z, \cdots$ と置いて, その未知数の満たすべき性質を式にあらわす事により方程式は立てられる．「40 円切手と 60 円切手を合わせて 10 枚買って、代金を 520 円払いました．40 円切手と 60 円切手それぞれ何枚買いましたか？」という問題には, 40 円切手、60 円切手の枚数をそれぞれ未知数 x, y とし x, y の **連立一次方程式を立ててやり** それを次の様に解く事ができる．

$$\begin{cases} 40x+60y &= 520 \\ x+y &= 10 \end{cases} \qquad \begin{array}{rcl} 40x+60y &=& 520 \\ -)40x+40y &=& 40\times 10 \\ \hline 20y &=& 520-400 \end{array} \qquad \begin{cases} y &= 120\div 20 = 6(\text{枚}) \\ x &= 10-y = 4(\text{枚}) \end{cases}$$

さて、問題を少し変えよう．「40 円の切手と 60 円切手を合わせて 10 枚買って、代金を 510 円払いました．40 円切手と 60 円切手それぞれ何枚買いましたか？」方程式は $40x+60y=510, x+y=10$ となるのでこれをそのまま解くと $20y=110$ で, $y=5.5$ となる．切手の数は整数でなければならないという暗黙の了解の下では実は **解は無い** と答えねばならない．また, あなたが整数だけしか存在してはいけないカブトムシの国の住人とすれば問題を解いた瞬間に、当局につかまってしまう．
でも、切手だという事を忘れてしまえば、方程式は $x=4.5=\frac{9}{2}, y=\frac{11}{2}$ という有理数の解が存在する．日本国においては, 有理数は存在してもいいので解はあるのだか、切手は半分では売ってくれないのでこの問題には解がないといった方が日本国の文明がカブトムシの国よりも進んでいる事の証明になろう．
さて、問題をさらに次の様に変えよう．「A 君は同じ値段 40 円の記念切手,「犬の雄叫び」と「猫の昼寝」を 2 種類合わせて 10 枚買い, 代金 400 円を払いました．「犬の雄叫び」と「猫の昼寝」それぞれ何枚ずつ買いましたか．」これを方程式にすると「犬」、「猫」をそれぞれ x, y 枚とすると方程式は $x+y=10, 40x+40y=400$ である．しかし、最初の式と 2 番目の式の両辺を 40 で割った式はまったく同じ式である．これでは解は決まらない．このような時は **解は定まらない, 不定** という．
方程式を考える事は数学においてだけではなく、非常に大切な事である[1]．そして, 与えられた問題に対して, 方程式を立ててから、方程式を解く、解けなければ解の存在を疑う等のプロセスを整理すると次の様になるであろう．(この考え方は, 代数方程式だけでなく, 微分方程式, 差分方定式等でも同じである.)

1. 問題が与えられる．
2. わからない数や量（または関数) を $x, y, \cdots$ と置く．
3. 現在まで知られてる情報と法則を使って $x, y, \cdots$ の間に成立する関係を、式や言葉で表す．
4. 方程式を解こうと努力する．(今まで知られている解法が適用できるか否か.)
5. 解けなければ、解が存在するかどうか検討する．場合によっては, 数や関数の集合を拡張する[2]
6. 解が存在しないとすればその原因が何かを検証する．(問題自体が間違っていた．　方程式の立て方が間違っていた．単純な自分のミス．数学が矛盾している場合[3]）．
7. 解がある数を拡張したところで存在が示せれば, その解がどの範囲に収まっているか．具体的にどのような数で表せるかということを検討し、最初の問題に対する答えを適切に述べる[4].

Date: 京都大学理学研究科　 2002 年 1 月 7 日.

[1] この事については小室直樹 [K], p22–47 に興味深く論じられている

[2] 自然数 → 整数 → 有理数 → 実数 → 複素数．多項式関数 → 正則関数 → 微分可能関数 → 連続関数 → 超関数などという風に.

[3] これはあり得ないことではない．しかし単純な自分のミスを「数学が矛盾している」といって覆い隠す事はしばしばおこる事ではあるが生産的ではなく後で自己嫌悪が増すだけなのでやめよう

[4] いずれにしてもこのプロセスを経ることによって物事に対する理解が深まる事が期待される

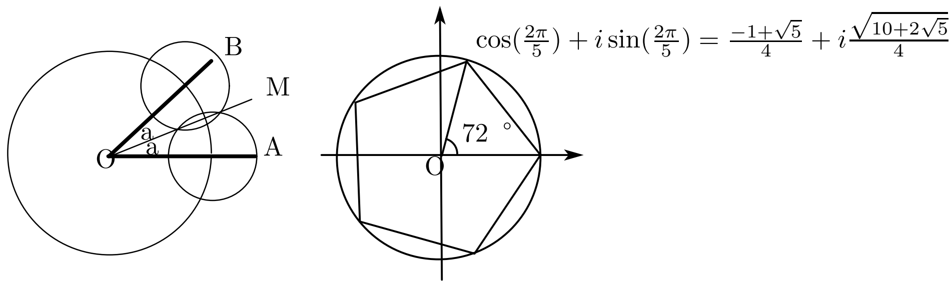


FIGURE 1

2. 作図問題と代数方程式

円に内接する正三角形が、定規とコンパスで作図可能という事は良く知られている．ここで

以下、「作図可能」と言うことは「定規とコンパスで作図可能である事」とする

正 5 角形も作図可能である事, また正 17 角形はガウスが作図した事をご存知の方も多いと思う．与えられた角の 2 等分を作図することはできるので, 正 m 角形が作図可能であれば正 $2m$ 角形は作図可能である事は分かるであろう．よって数学的帰納法を用いれば, 全ての自然数 $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 正 $2^k m$ 角形が作図できる事が分かる．(Figure 1 を参照).
それでは,

問題 2.1.

$$\boxed{\text{奇整数 } n \text{ に対して, いつ正 } n \text{ 角形が作図できるか}} \tag{1}$$

という問題を考えよう．また, 古代ギリシアにおける、幾何学の 3 大難問を思い出しておこう ([K] を参照).

問題 2.2.
1. 任意の角[5]を定規とコンパスのみで 3 等分せよ．（任意の角の *3* 等分を作図せよ.）
2. 与えられた円と同じ面積の正方形を作図せよ.
3. 与えられた直方体と形は同じで体積が 2 倍の直方体を作れ.(デロスの問題)

これらは, 古代ギリシアのソフィスト[6]たちを悩ませる問題となった.
ガウス平面をご存知の方には平面上の点と複素数を同一視する事により, 平面上の図形は複素数の集合と同一視できる．すると正 n 角形の作図問題については, 方程式

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0 \tag{2}$$

の解法に帰着する事は容易に理解していただけると思う．この観点からは少々粗っぽく述べると

正n角形が作図できるための必要十分条件は, 上の方程式 (2) の解法が
加減乗除と 2 次方程式を何度も解く事に帰着する事である.

その結果をまとめて, 方程式の解法についての理論を使うと正 n 角形の作図問題に対して次の定理が証明される．(証明を知りたい方は, 永田 [N] 等を参照の事).

定理 2.1. 奇整数 n に対して, 正 n 角形が作図可能である為には, $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ で $p_1, p_2, \cdots, p_r$ は異なる素数で各 p_i は $1 + 2^{e_i}$(e_i は自然数) と書ける事が必要十分条件である.

この定理で $n = p$（一個の素数) の時を考えると, 正 n 角形が作図できる為には $p = 1 + 2^e$ なる素数の時である．これを下から順番に並べてみると

e	1	2	4	8	16
$p = 1 + 2^e$	3	5	17	257	65537

[5]ある特殊な角でなくどのような角を持ってきてもという意味
[6]古代ギリシアの哲学・修辞学の教師

となる．ガウスは正 17 角形の作図に成功したといって大層喜んだそうである．また、正 257 角形を作図した数学者もいる．
一方, この定理は, $n = p^2$（p は奇素数）であれば, 正 n 角形の作図は不可能である事を主張している．例えば $n = 3^2 = 9$ の時は, 正 9 角形を作図できない事になる．

<u>角 $2\pi/3 = 120$ 度 の 3 等分（$= 40$ 度）は定規とコンパスでは作図出来ない</u>

事が分かる．
また上のデロスの問題については, 2 の立方根, すなわち

$$x^3 - 2 = 0 \tag{3}$$

の唯一の実数解 $\sqrt[3]{2}$ が定規とコンパスで作図可能かという問題にと言い換えられる．
これらの作図問題の解決には, 上の方程式の解とその解法の仕方についての考察が必要である事はおぼろげにわかっていただけると思う．実際ガウスは, $n = 17$ の時の方程式 (2) を深く考察したのであった．一般に $n = p$ が素数の時, 方程式 (2) は, 有理数係数で素因数分解できない事が示され，<u>**円周等分方程式**</u> といわれる．

3. **代数方程式**

Q, **R**, **C** でそれぞれ有理数全体, 実数全体, 複素数全体をあらわす．これらが、加減乗除について、普通に計算できることはよく知られている．この意味で, これらを体と呼んでいる (体の正確な定義は [N], [[U] 付録] 等を見よ）．K でこれらの体のどれかをあらわす事にする．
n をある自然数とする．一般に体 K 上の一変数代数方程式とは, 変数もしくは未知数 x に対して

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0. \tag{4}$$

なる関係の事である．ここで、$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ は与えられた K の数であり, $a_n \neq 0$ とする．この時, 方程式 (4) の次数を n という．

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad \text{一次方程式} \tag{5}$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad \text{ニ次方程式} \tag{6}$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad \text{三次方程式} \tag{7}$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0) \quad \text{四次方程式} \tag{8}$$

勿論、変数を増やして多変数にしたり、方程式の数を増やして連立方程式にしたりすることは当然考えられる．
方程式の概念がこのように、簡略な式の形で述べられる為には未知数や変数 x や係数の $a, b, c, \cdots,$ 等をあらわす文字式の概念が十分発達しなければならなかった事は容易に想像されると思う．これらについては上野先生のお話があるはずなので触れないが、ここで強調したいのは次の事である．

> 代数の問題は、バビロニア[7]の時代から提出され,解かれていたが、厳密な意味での代数学の進歩は、主として使いやすい記号表記がなかったために 17 世紀末までは、はなはだ遅く,難渋していた.(中略).およそ 1850 年ごろまで、すべての数学者にとって代数学とは（単独あるいは連立の代数方程式の研究の事であり、それを解く為に工夫された方法のことであった.(デュドネ編：数学史 I[[D], 60 ページ]).

実際, 連立一次方程式を、最終的に $ax = b$ の形に帰着させて解く事や 2 次方程式の解の公式は紀元前のバビロニアにおいてすでに知られていた．また、後でのべる 3 次方程式や 4 次方程式の根号記号のみを用いた解の公式は, 16 世紀に、カルダーノ（Cardano, 1501〜1576), フェラーリ（Ferrari) によって発見されていた．その当時、数の概念がそれ程厳密ではなかったと思われるので、5 次方程式の解の存在の概念も、そのような公式の存在と混同されていたと想像される．18 世紀後半から、19 世紀、そして 20 世紀には、「代数学」は,「微積分学」とともに大いに発展した．その発展を振り返ると, バビロニアから 4000 年以上もおおった沈滞に比して、真に驚かざるを得ない．高校生の皆さんが勉強している代数は、文字式を使う事では 16 世紀以降であろうが、中身は極言すれば バビロニアまでの数学なのである．大学に入って、代数学を学ばれると最初はきっと驚くに違いない．なにせ、バビロニアから一気に 18 世紀いや 20 世紀の代数を教え

られるのである．しかも、代数学が進歩すると同時に「論理的に整理され」「いくつも近道が発見され」ているので、実はその 4000 年のギャップが 1 年位の勉強で取り除かれてしまう事がおきる．すると現代の代数学をマスターしてしまった先生は、その 4000 年の痛みをわすれて「何故こんな簡単な事がわからないのだ．最近の学生は」などと口走ってしまうのである[8]．
少し脱線してしまったのが、この代数学の躍進の一つの原因として, ガロア (E. Galois, (1811-32)) が、方程式の解の間の置換のなす変換を一般化した「群」という概念を導入した事が大きいと考える．この事については後で述べる．

4. 4 次方程式まで

さて K を体[9]として方程式 (5) から (8) を解いてみよう．方程式 (5) は $a \neq 0$ であるから言うまでもなく

$$ax + b = 0 \quad x = -\frac{b}{a}. \tag{9}$$

が解である．ここで, $a, b \in K$ ならば, $-\frac{b}{a} \in K$ であるので解は最初の体 K の中に入っている．さて、2 次以上の方程式 (4) の全体を a_n で割って, a_k/a_n を新たに b_k と思うと

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0. \tag{10}$$

さらに、ここで変数変換 $X = x + \frac{b_{n-1}}{n}$ をすると方程式は

$$X^n + (-n \times \frac{b_{n-1}}{n} + b_{n-1})X^{n-1} + X \text{ の } n-2 \text{ 次以下の項} = 0$$

となるので

$$X^n + \quad + c_{n-2}X^{n-2} \cdots + c_1 X + c_0 = 0. \tag{11}$$

となる．$n = 2, 3, 4$ について、変換前、変換後の方程式を示すと

2	$ax^2 + bx + c = 0$	$x = X - \frac{b}{2a}$	$X^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$
3	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$	$x = X - \frac{b}{3a}$	$X^3 + \frac{(-ab^2 + 3a^2c)}{3a^3}X + \frac{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)}{27a^3} = 0$
4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$	$x = X - \frac{b}{4a}$	$X^4 + \left(\frac{-3\,b^2}{8\,a^2} + \frac{c}{a}\right)X^2 + \left(\frac{b^3}{8\,a^3} - \frac{b\,c}{2\,a^2} + \frac{d}{a}\right)X + \frac{-3\,b^4}{256\,a^4} + \frac{b^2\,c}{16\,a^3} - \frac{b\,d}{4\,a^2} + \frac{e}{a} = 0$

(12)

さて、これから, ニ次方程式については次の解の公式が得られる．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{13}$$

ここで、気をつけて欲しいのは, a, b, c が例えば有理数であっても $\sqrt{b^2 - 4ac}$ なる数は一般には有理数ではない事である．例としては $x^2 - 2 = 0$ の解, $\sqrt{2}$ は有理数ではない事が示される．
三次方程式は、初めから $X^3 + pX + q = 0$ の形としよう．$D = -4p^3 - 27q^2$ と置く時,

$$y_0 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{27q + 3\sqrt{-3 \cdot D}}{2}}, \quad z_0 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{27q - 3\sqrt{-3 \cdot D}}{2}}. \tag{14}$$

なる複素数 y_0, z_0 を取る．この時、この根号を取るのでその選び方は一通りではない．しかしとにかく一組とる．すると、3 次方程式 $X^3 + pX + q = 0$ の 3 つの解は

$$x = \begin{cases} -y_0 - z_0 \\ -\omega y_0 - \omega_2 z_0 \\ -\omega^2 y_0 - \omega z_0 \end{cases}$$

ただしここで, ω は $x^3 - 1 = 0$ の解で、$\omega \neq 1$ であるもの．

---

[8]そしてあなたは、代数学の先生の冷たい態度に涙するかもしれない．でも頑張ってマスターするとあなたも何で簡単な事がわからないのと文句を言うに決まっている．

[9]慣れない人は $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ と思ってかまいません．

さて四次方程式である．$X^4+pX^2+qX+r=0$ の形に整理されているとしよう．この時、次の W についての三次方程式を考える．

$$W^3+2pW^2+(p^2-4r)W-q^2=0. \tag{15}$$

この三次方程式 (15) の 3 つの解を $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ とすると，四次方程式の解は

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3}\right) \\ X &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}-\sqrt{\theta_3}\right) \\ X &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}-\sqrt{\theta_3}\right) \\ X &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3}\right) \end{aligned}$$

ここで注意して欲しいのは, 平方根，3 乗根を取る時にそれが一意的に決まらない事である．よって、上の公式において解の順番は、その取り方による．しかし、全体の解の集合自体は最初の取り方によらないのである．

5. 解の存在定理としてのガウスの代数学の基本定理

ある複素数 $a\in\mathbf{C}, a\neq 0$ が与えられた時, その n 乗根

$$\sqrt[n]{a}$$

はどの様に定まるのであろうか？ この n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ は

$$x^n-a=0$$

の解の事であるが, その解を複素数の範囲で求める事は、次のように行う．a を極座表で表示する．

$$a=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

ここで、$0\le\theta<2\pi$ に正規化しておく．その時, r は正の実数であるから，$\sqrt[n]{r}$ はただ一つの実数として定まる．

$$\zeta_n=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)=\cos(\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{2\pi}{n})$$

とおくと, 加法定理もしくは複素数の積の公式を使えば

$$(\zeta_n)^k=\cos(\frac{2\pi k}{n})+i\sin(\frac{2\pi k}{n}).$$

すると、上の解は

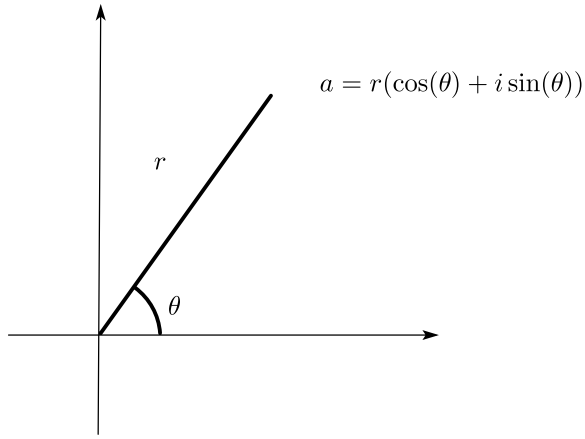
$$x_0=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}).$$

と置く時,

$$x_0, x_0(\zeta_n), x_0(\zeta_n)^2,\cdots,x_0(\zeta_n)^{n-1}$$

の n 個の複素数であらわせる．これは、かなりわかりやすい表示であり、一般の複素数 a に対してその n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ はその多価性に注意してやれば存在は疑い様がない．だから、五次方程式でも、前節のような公式があれば、解の存在は明らかである．だから、皆、五次以上でも解の公式を探し求めた．しかし、この方向はうまくいかないのは後にわかるのである．
しかし、解の公式を見つけなくても一般の複素係数 n 次方程式が複素数の範囲で解を持つ事を示したいと思ったのはガウスである．このガウスの姿勢は, その後の数学の発展にすさまじい影響を与えた．方程式を解が、複素数の範囲である事がわかっていれば根号で解けなくても解の性質についてのなんらかの知見を得ることが出来る．また、解が複素数の範囲に存在しなければ、方程式の解を見つける為にさらに、複素数を拡張する必要がある．
次はガウスの示した代数学の基本定理を思い出しておこう. (証明は例えば上野 [U], 160 ページを見よ).

定理 5.1. *複素係数の n 次代数方程式 (4) は，少なくとも一つ複素数の解をもつ．よって，重複度も込めて丁度 n 個の解をもつ．*



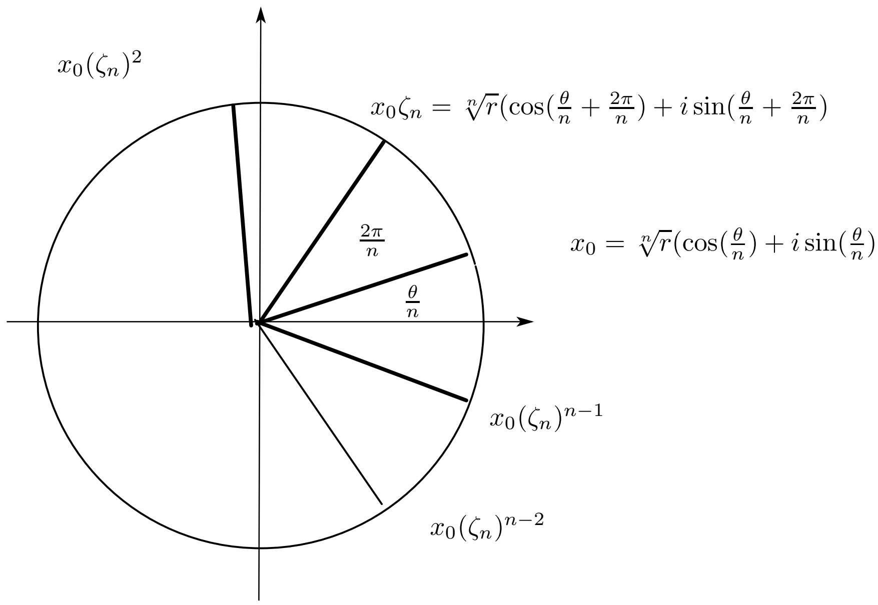


FIGURE 2

6. 五次方程式とガロアの理論

カルダノとフェラーリの公式の発見の後, 五次方程式に対して、四則演算と根号のみを用いた解の公式を見つけようと多くの数学者が研究した．数学史 [D] においては Tschirnhaus, Euler, Waring, Lagrange, Vandermonde 等の名前が挙げられている．
Lagrange は、カルダノやフェラリの公式を検討して、与えられた複素数係数の n 次方程式 (4)$f(x) = 0$ の解 $\alpha_1, \cdots .\alpha_n$ を考えた．その n 個の解の存在は、ガウスの代数学の基本定理から保障されている．しかし、その解の順番のつけ方は方程式だけからは決まらない．よって、その解の順番を並べ替える事を考えた．
二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解を α, β とするとき，解と係数の関係は

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

と書ける．二つの解の和と積は, 解の順番の入れ替えによって変わらない、すなわち元の方程式から決まってしまうということを言っている．三次方程式でも同じで

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の解を α, β, γ とすると, 次が成立する．

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

今, 方程式を $x^3+px+q=0$ と変型し、p, q ともに有理数とし, その解は複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ によって具体的にあたえられているとする。$\delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$ すると, $D=\delta^2$ は、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の順番の入れ替えについて不変であるが、δ は例えば, α_1, α_2 を入れ替えると $\delta \to -\delta$ と符号が変わる事がわかる．D は実は, p, q の式で表せるのである[10]．$\delta=\sqrt{D}$ であり、体の拡大列 $L=\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \supset M=\mathbf{Q}(\delta) \supset \mathbf{Q}$. が出来る。ここで、天下りであるが

$$Gal(L/\mathbf{Q})=\{\sigma : L \longrightarrow L, \text{体の同型}, \sigma_{|\mathbf{Q}}=\text{恒等写像}\}$$

という写像の集合を考える．体の同型 $\sigma : L \longrightarrow L$ とは、集合の同型で体の加法と積の演算を保つものである．これらの写像を二つ σ, τ もってくるとその写像の合成 $\sigma\tau$ も $Gal(L/\mathbf{Q})$ の元であり、この集合 $Gal(L/\mathbf{Q})$ は群になる[11]．同様に群 $Gal(L/M)$, $Gal(M/\mathbf{Q})$ 等も同じ様に定義される．これを体の拡大 $L/\mathbf{Q}$ のガロア群という．

ガロアは, K 上で分解されない既約多項式 $f(x)$ を取り，$f(x)=0$ なる方程式に対し、その解を全て付け加えた体 $L=K(\alpha_i)$ を考え、同様に群 $Gal(L/K)$ を定義した．今この群を方程式のガロア群と呼ぼう．付け加えると群という概念を明確に定義したのはガロアである．この群は言い換えれば、方程式の解に働く対称性をあらわす群といってよい．ガロアが若くして示した定理は画期的であった．

定理 6.1. 体 K 上の既約方程式 $f(x)=0$ の解が、K の元から出発し四則演算と根号をとる操作で表せるためにはそのガロア群 G が次の性質 (可解性という）を満たす事が必要十分である．

> ガロア群 G から出発する正規部分群の列 $G=H_0 \supset H_1 \supset \cdots H_i \supset H_{i+1} \supset \cdots \supset H_l=\{1\}$ であってその連続する剰余群 H_i/H_{i+1} が全て可換群になる．

ガロアは、五次方程式で、ガロア群が五次の置換群 S_5 になるものが存在すること、そして S_5 が可解群でないことをしめした．これにより、一般の五次方程式には根号による解の公式がない事が示されたのである．ちなみに、S_3, S_4 は可解群である．

ガロアの思想は粗く言うと「方程式に対し個々の解よりも、解の間の対称性に注目し、その対称性全体からなる群そしてその部分群についての情報から、解の性質を浮かび上がらせる」とまとめられるであろう．この事は、現代の相対論的量子力学で中心となっているゲージ理論において，基本的要請「物理量は、局所的なゲージの変換に対して不変であるべき」から多くの自然法則を説明できる事を思い出させる．このゲージ理論の成功はこのガロアの思想がその源であるといってもよいであろう．

References

[D] デュドネ編：数学史 I. 岩波書店.

[K] 小室直樹: 数学嫌いの人の為の数学「数学原論」. 東洋経済新聞社.

[N] 永田雅宜: 可換体論, 数学選書 6, 裳華房.

[U] 上野健爾：代数入門 1, 岩波講座 現代数学への入門, 岩波書店.

[10] $D=-4p^3-27q^2$ である事を示せ

[11] 群の定義は [N] 等をみよ