

0

パンルヴェ第 VI 方程式の幾何学

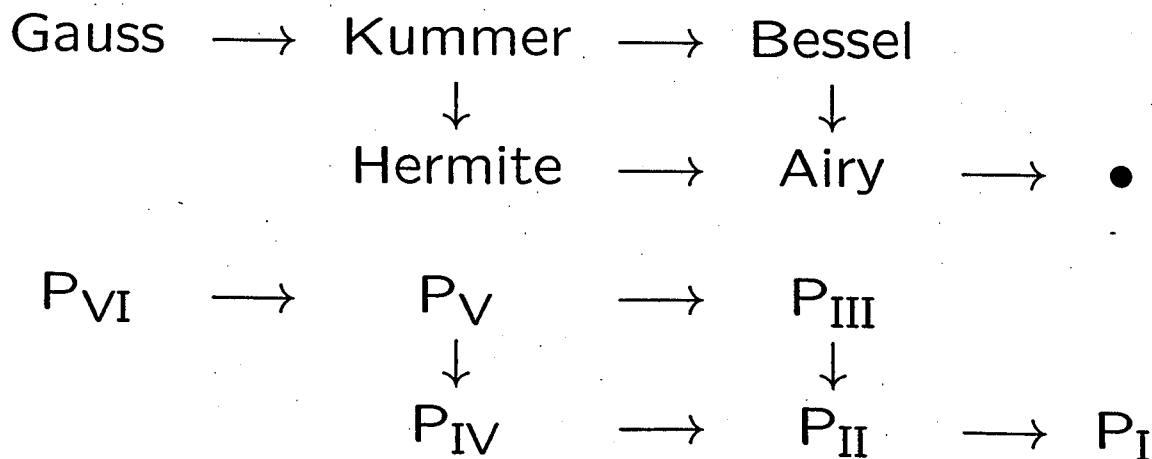
by

岩崎 克則

九州大学大学院数理学研究院

Painlevé 方程式とは？

- (1) 約 100 年前に Painlevé とその弟子 Gambier によって発見された 6 種類の 2 階非線型常微分方程式の総称. $P_I, P_{II}, \dots, P_{VI}$ と表わす.
- (2) 多変数版にあたる Garnier 系, 離散版にあたる 離散・超離散 Painlevé 方程式などもあり, まとめて Painlevé 系ということがある.
- (3) いわゆる特殊関数を定義する 2 階線型常微分方程式の非線型版と考えられる. 下の図式参照.
- (4) その長い歴史にもかかわらず, Painlevé 方程式の理解が進んだのは比較的最近のこと.



Painlevé VI 方程式 $P_{VI} = P_{VI}(\kappa)$ とは？

複素領域における 2 階非線型 ODE (とても非線型！)

$$\begin{aligned}
 q_{tt} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) q_t^2 \\
 & - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) q \\
 & + \frac{q(q-1)(q-t)}{2t^2(t-1)^2} \left\{ \kappa_4^2 - \kappa_1^2 \frac{t}{q^2} \right. \\
 & \left. + \kappa_2^2 \frac{t-1}{(q-1)^2} + (1 - \kappa_3^2) \frac{t(t-1)}{(q-t)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

未知関数 : $q = q(t)$

定義域 : $T = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$

4 パラメータ : $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \mathbb{C}^4$

注意: Gauss の超幾何方程式 (3 パラメータ)



$$t(1-t)f_{tt} + [c - (a+b+1)t]f_t - abf = 0$$

のある意味での非線型版といえる。

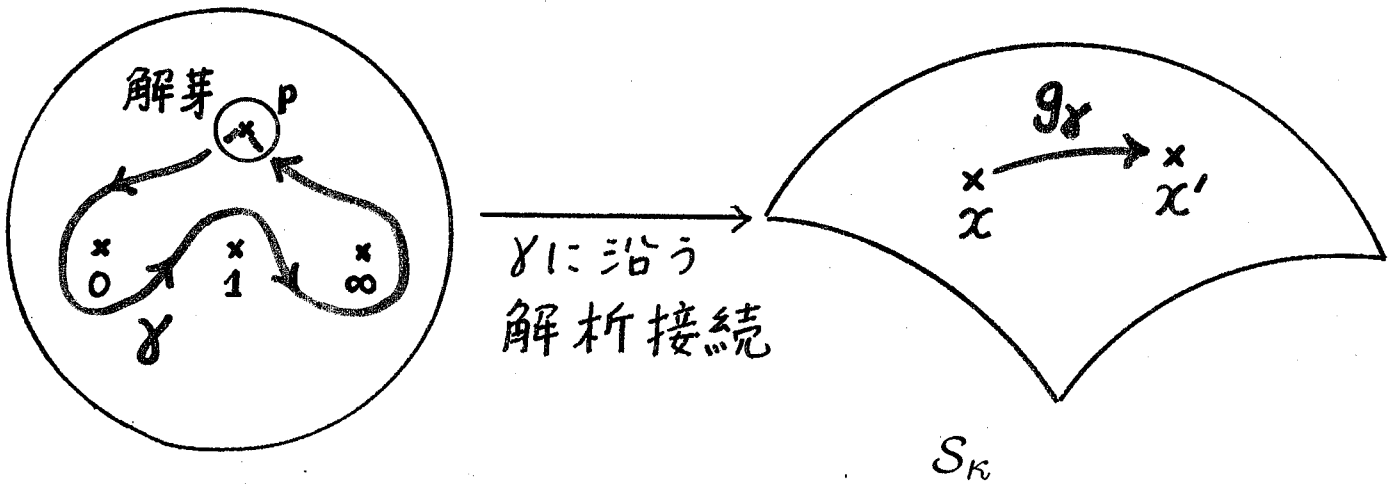
P_{VI} における論点

- (1) P_{VI} とはそもそも何であるか？ 幾何学的描像
- (2) P_{VI} の解空間とは何か？
- (3) 解の大域的性質，特に解析接続の様子は？
(多価性＝非線型モノドロミーの記述)
- (4) 連続 Hamilton 系としての P_{VI} . 相空間は？
- (5) P_{VI} の対称性を表わす離散力学系
(**Bäcklund** 変換群)
- (6) P_{VI} の非線型モノドロミーを表わす離散力学系
(**modular** 群の 3 次曲面への作用)
- (7) 離散力学系の軌道と P_{VI} の解の性質
- (8) さまざまの数学との関連性
(symplectic 幾何，moduli 空間の幾何，基本群の表現空間，3 次曲面の代数幾何学，組み紐群・modular 群，単純孤立特異点，affine Weyl 群，複素離散力学系，etc.)

線型 VS 非線型 ODEs

微分方程式	解空間	イメージ画
2 階線型	平面	 まっすぐ
2 階非線型	曲面	 まがっている

解の解析接続 = 非線型モノドロミー



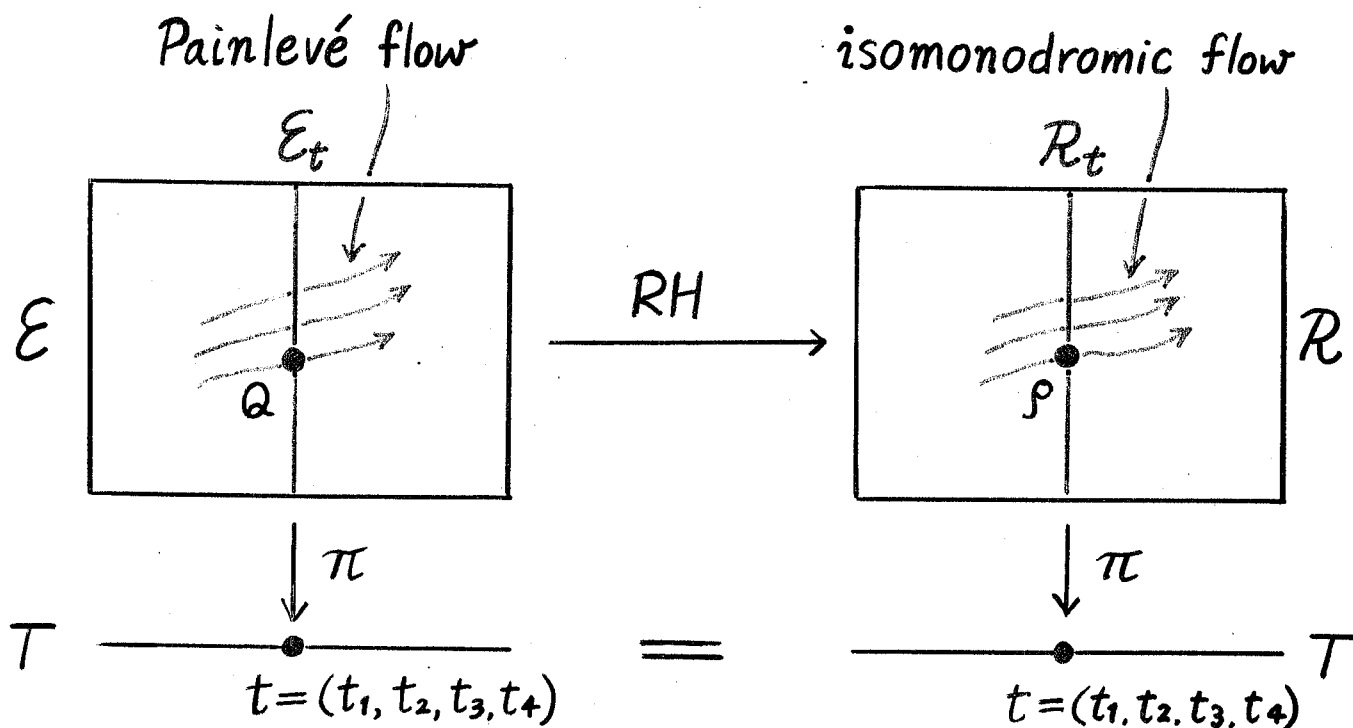
$X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$
 $P_{VI}(\kappa)$ の定義域

$P_{VI}(\kappa)$ の解の芽 at p
 全体のなす曲面

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, p) & \longrightarrow & \text{Aut}(S_\kappa) \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 \gamma & \longmapsto & g_\gamma
 \end{array}$$

$\pi_1(X, p) \cong \Gamma(2)$: レベル 2 の modular 群

基本的図式



$T : \mathbb{P}^1$ 上の 4 点 $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ の配置空間

$$X_t = \mathbb{P}^1 - \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$$

$\mathcal{E} = \{\mathbb{P}^1$ 上 4 点確定特異点を持つ 2 階 Fuchs 型
方程式 (接続) の同型類}

$\mathcal{E}_t = \{t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ に特異点を持つ \mathcal{E} の元}

$\mathcal{R}_t = \{\text{基本群 } \pi_1(X_t) \text{ の } SL_2(\mathbb{C}) \text{ への表現類}\}$

$\mathcal{R} : \mathcal{R}_t$ を $t \in T$ 上束ねたもの

RH : Riemann-Hilbert 対応

$Q \mapsto \rho : Q$ の monodromy 表現

Fuchs 型接続の空間 \mathcal{E}_t

元 $Q \in \mathcal{E}_t$ は対 (E, ∇) の同値類, ただし

- $E : \mathbb{P}^1$ 上の階数 2 の正則ベクトル束
- $\nabla : E$ 上の有理型接続, X_t 上正則,
 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ において高々 1 位の極
- $(E, \nabla) \sim (E', \nabla')$ (同値) とは

$\exists G : E \rightarrow E' : \text{有理型 gauge 変換 s.t.}$

(1) G は X_t 上正則同型

(2) $\nabla' = G \circ \nabla \circ G^{-1}$

Riemann-Hilbert 対応 $\text{RH} : \mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{R}_t$

$Y : \text{ODE } \nabla Y = 0$ の基本解 at 基点 $* \in X_t$

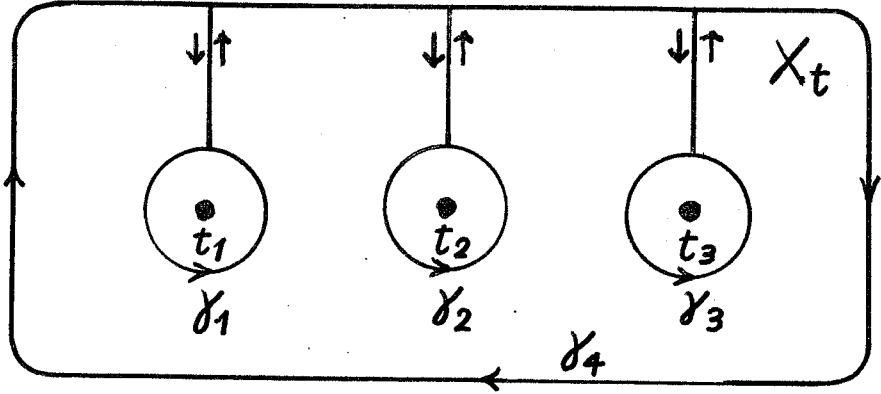
ループ $\gamma \in \pi_1(X_t, *)$ に対して

$\gamma[Y] = Y \rho(\gamma) : \gamma$ に沿う解析接続

$\rho : \pi_1(X_t, *) \rightarrow SL_2(\mathbb{C}), \gamma \mapsto \rho(\gamma)$

$\text{RH} : \mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{R}_t, Q \mapsto \rho : Q$ の monodromy 表現

基本群 $\pi_1(X_t)$ の生成元



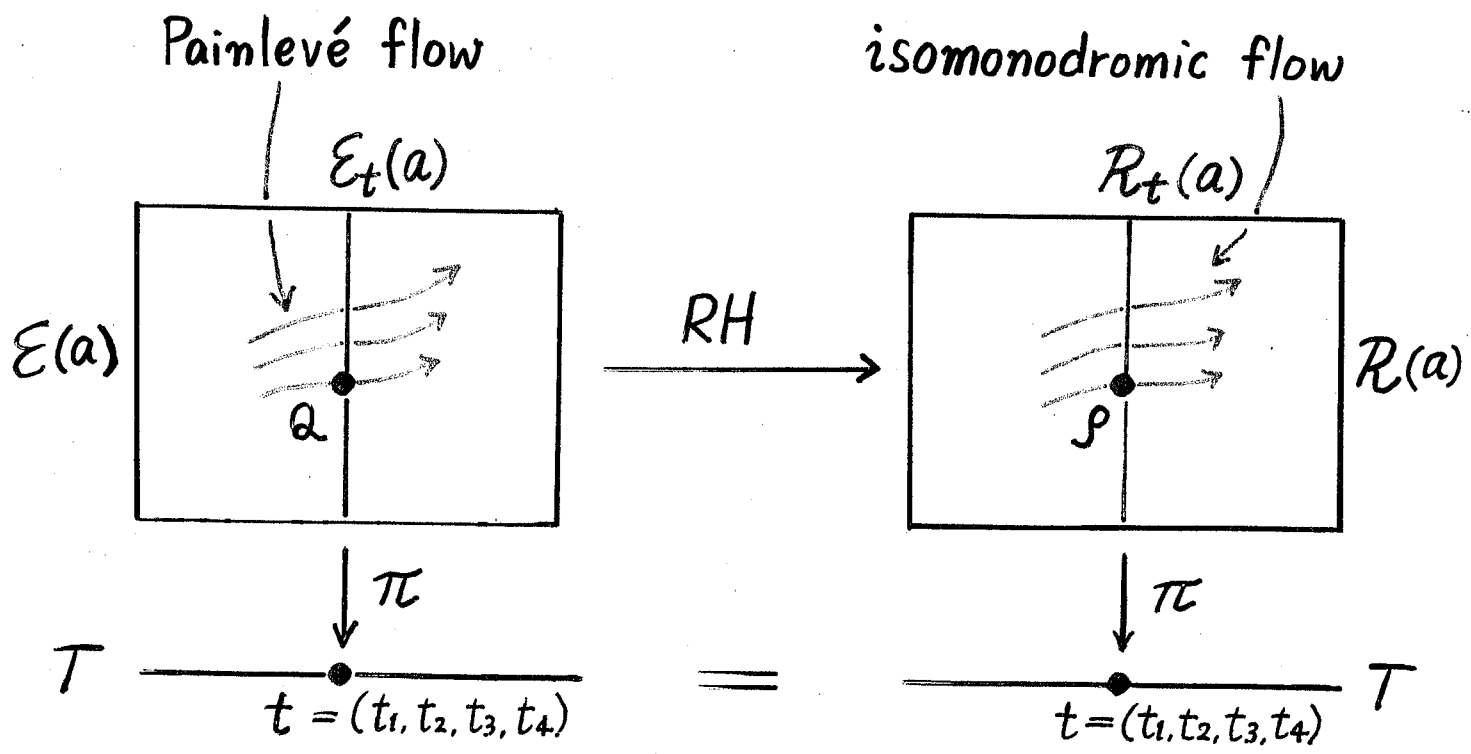
局所モノドロミーの固定

$a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$ に対して (局所モノドロミーデータ)

$$\mathcal{R}_t(a) = \{\rho \in \mathcal{R}_t : \text{Tr} \rho(\gamma_i) = a_i\}$$

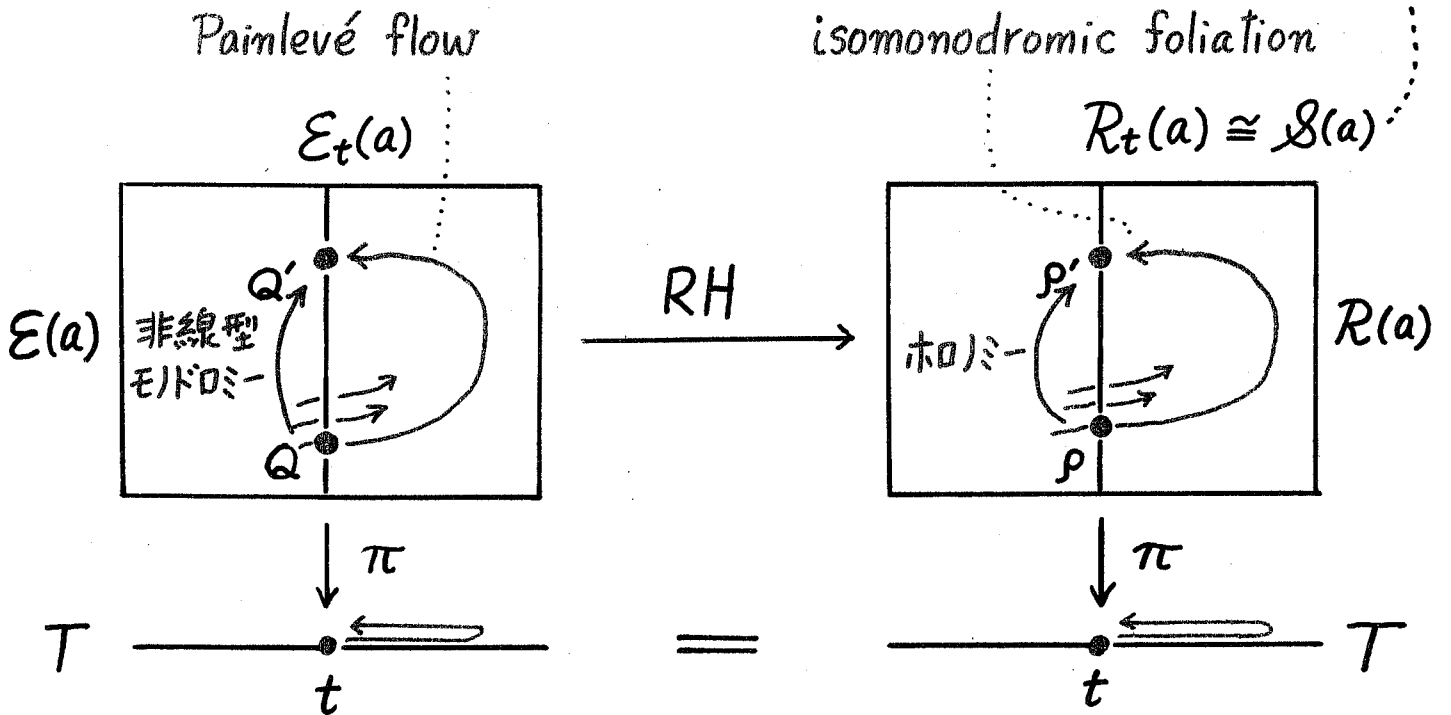
$$\mathcal{E}_t(a) = \{Q \in \mathcal{E}_t : \text{RH}(Q) = \rho \in \mathcal{R}_t(a)\}$$

基本図式 (改訂版)



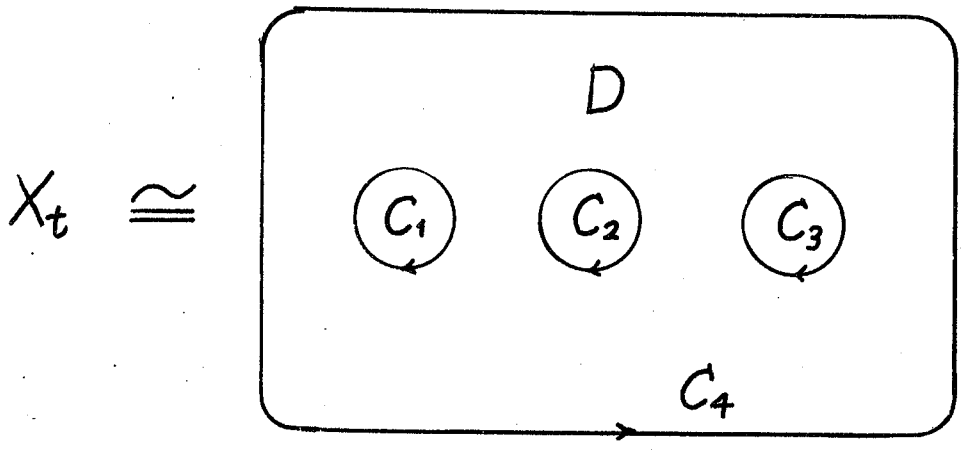
幾何学的 ingredients

3次曲面



- $\mathcal{R}_t(a)$ 上の symplectic 構造 $\Omega_{\mathcal{R}_t(a)}$
- $\mathcal{R}_t(a)$ 上の monodromy 保存葉層構造
- 葉層構造の holonomy
... 組み紐群の $\mathcal{R}_t(a)$ への作用
- $\mathcal{R}(a)$ 上の Poisson 構造と基本 2 次形式 $\Omega_{\mathcal{R}(a)}$
⇒ 葉層構造は Hamilton 力学系
- 葉層構造, Poisson 構造の RH による引き戻し
⇒ Hamilton 力学系としての P_{VI}
- $\mathcal{R}_t(a) \cong \mathcal{S}(a)$: 複素 3 次曲面の幾何学
... modular 群の $\mathcal{S}(a)$ への作用
- 写像 RH の退化と単純孤立特異点理論

$\mathcal{R}_t(a)$ 上の symplectic 構造



L_ρ : 表現 $Ad \circ \rho$ に付随する D 上の平坦 $sl_2(\mathbb{C})$ 束

$$C = \partial D = \bigcup_{i=1}^4 C_i$$

接空間: 無現小変形理論より

$$T_\rho \mathcal{R}_t(a) = \text{Ker} [j^* : H^1(D; L_\rho) \rightarrow H^1(C; L_\rho)] \cong H^1(D, C; L_\rho) / \delta^* H^0(C; L_\rho)$$

長完全列: 空間対 (D, C) のコホモロジー完全列

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^0(C; L_\rho) & \xrightarrow{\delta^*} & H^1(D, C; L_\rho) & \xrightarrow{i^*} & & \\ & & & & & & \\ & H^1(D; L_\rho) & \xrightarrow{j^*} & H^1(C; L_\rho) & \rightarrow & & \end{array}$$

Poincaré 双対性: 非退化双一次形式

$$\begin{array}{ccc} & H^1(D; L_\rho) \times H^1(D, C; L_\rho) & \\ \xrightarrow{\text{cup product}} & & H^2(D, C; L_\rho \otimes L_\rho) \\ \xrightarrow{\text{Killing form}} & & H^2(D, C; \mathbb{C}_D) \cong \mathbb{C} \end{array}$$

\Rightarrow symplectic 2-form が誘導される:

$$\Omega_{\mathcal{R}_t(a)} : T_\rho \mathcal{R}_t(a) \times T_\rho \mathcal{R}_t(a) \rightarrow \mathbb{C}$$

$\mathcal{R}(a)$ 上のモノドロミー保存葉層構造

葉層構造: $\pi_1(X_t)$ の表現が \mathbb{P}^1 から抜く点 $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ を局所的にずらしても変わらないことから定まる局所系... それに付随する位相的葉層構造

葉層構造の大域挙動 (holonomy): 典型ファイバー $\mathcal{R}_t(a)$ への $\pi_1(X_t) = B_3$ (3本紐の braid 群) の作用 $\rho \mapsto \rho^\beta$ により決まる. 作用の規則は

$$\rho^\beta(\gamma^\beta) = \rho(\gamma) \quad (\beta \in B_3, \gamma \in \pi_1(X_t))$$

但し B_3 の $\pi_1(X_t)$ への作用 $\gamma \mapsto \gamma^\beta$ は後述

$\mathcal{R}(a)$ 上の Poisson 構造

Poisson 構造を定める基本 2 次形式 $\Omega_{\mathcal{R}(a)}$ は次の 2 条件により定まる:

$$(1) \quad \Omega_{\mathcal{R}(a)}|_{\mathcal{R}_t(a)} = \Omega_{\mathcal{R}_t(a)}$$

↑ 既出のファイバーに沿うシンプレクティック

(2) 葉層に沿う (局所) ベクトル場 V に対し **構造**

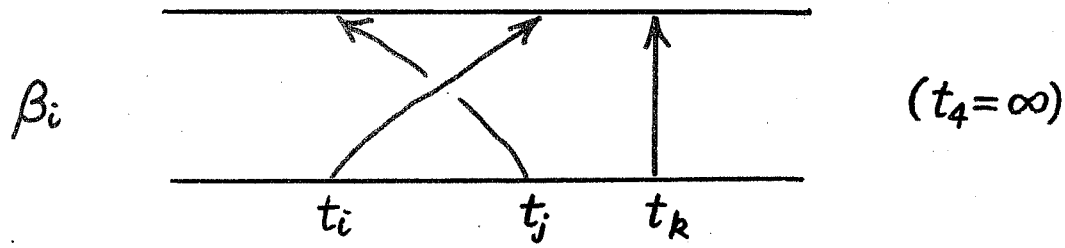
$$\iota_V \Omega_{\mathcal{R}(a)} = 0$$

但し ι_V は内部積 (葉層構造の Hamilton 性)

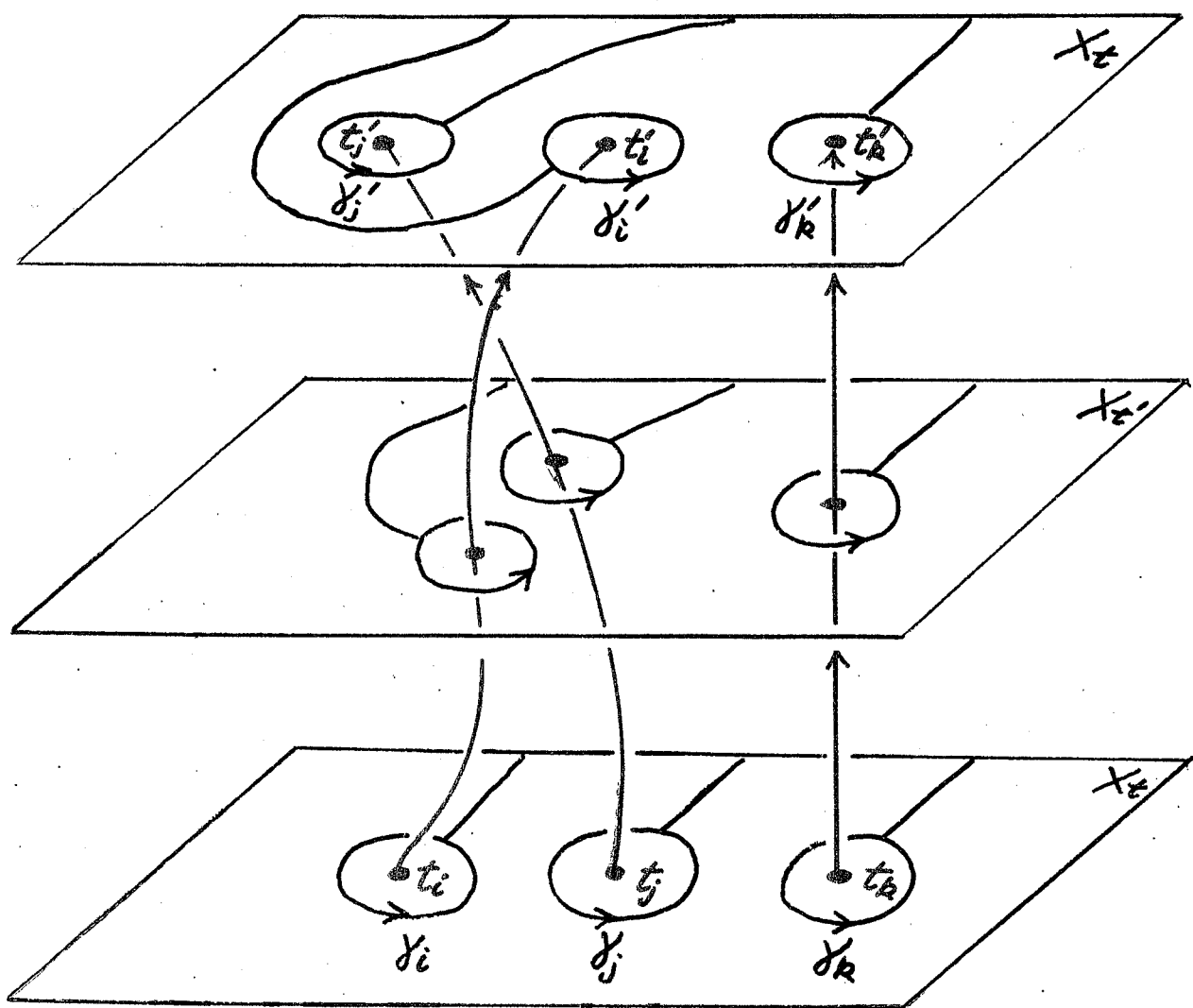
組み紐群 B_3 の $\pi_1(X_t)$ への作用

生成元: $B_3 = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$, $\pi_1(X_t) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$

基本 braids: $(1, 2, 3)$ の巡回置換 (i, j, k) に対し



作用 $\beta_i : (\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k) \mapsto (\gamma'_i, \gamma'_j, \gamma'_k)$ の記述:



表現空間と 3 次曲面族 (辞書)

(典型的な点 $t \in T$ を固定)

表現空間	3 次曲面
$B_3 \curvearrowright \mathcal{R}_t$ \cup $P_3 \curvearrowright \mathcal{R}_t(a)$	$\Gamma \curvearrowright \mathcal{S}$ \cup $\Gamma(2) \curvearrowright \mathcal{S}(a)$
\mathcal{R}_t : 表現空間	\mathcal{S} : 3 次曲面族
$\mathcal{R}_t(a)$: 局所モノドロミー 固定の表現空間	$\mathcal{S}(a)$: 3 次曲面
B_3 : braid 群	Γ : full modular 群
P_3 : pure braid 群	$\Gamma(2)$: level 2 部分群
symplectic 構造 $\Omega_{\mathcal{R}_t(a)}$	Poincaré residue ω_a
抽象的対象	具体的対象

注意 1: B_3 の作用は Γ の作用に落ちる.

$$\Gamma \cong B_3 / Z(B_3), \quad Z(B_3) : \text{center of } B_3$$

注意 2: \mathcal{S} の ambient space $\mathbb{C}^7 = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$

表現 \rightarrow モノドロミーデータ \rightarrow 3 次曲面族

$$\mathcal{R}_t \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\Psi \quad \quad \quad \Psi \quad \quad \quad \Psi$$

$$\rho \mapsto (M_1, M_2, M_3) \mapsto (x, a)$$

モノドロミーデータ: $\rho \in \mathcal{R}_t$ に対して

$$M_i = \rho(\gamma_i) \quad : \quad \text{ループ } \gamma_i \text{ のモノドロミー行列}$$

3 次曲面族の座標: $(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{M}$ に対して、

$$\begin{cases} x_i = \text{Tr}(M_j M_k) & (i = 1, 2, 3) \\ a_i = \text{Tr} M_i & (i = 1, 2, 3) \\ a_4 = \text{Tr}(M_3 M_2 M_1) \end{cases}$$

但し $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とする. そして

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) & \in \mathbb{C}^3 \\ a = (a_1, a_2, a_3, a_4) & \in \mathbb{C}^4 \end{cases}$$

とおく. 以後, この座標を用いて具体的に議論する.

非線型モノドロミーの変換群

複素 7 次元空間 : $\mathbb{C}^7 = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \ni (x, a)$

空間座標 : $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$

パラメータ : $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$

(i, j, k) : $(1, 2, 3)$ の任意の巡回置換

$$\theta_i(a) = a_i a_4 + a_j a_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

変換の導入: \mathbb{C}^7 の多項式自己同型 g_i を次で導入

$$g_i : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7, \quad (x, a) \mapsto (x', a'), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$g_i : \left\{ \begin{array}{l} x'_i = \theta_j(a) - x_j - x_k x_i, \\ x'_j = x_i, \\ x'_k = x_k, \\ a'_i = a_j, \\ a'_j = a_i, \\ a'_k = a_k, \\ a'_4 = a_4. \leftarrow \text{常に固定} \end{array} \right. \quad (a_1, a_2, a_3) \text{ へは} \\ \text{置換として作用}$$

変換群: 変換 g_1, g_2, g_3 によって生成される群

$$G = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$$

関係式: 生成元は次の関係式をみたす.

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j, \quad (g_i g_j)^3 = 1, \quad g_k = g_i g_j g_i^{-1}$$

これは full modular 群 Γ の基本関係式に同値.

$$\begin{aligned} \Gamma &= PSL(2, \mathbb{Z}) \\ &= \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

群準同型: 群準同型 $\Gamma \rightarrow G$ が存在し, これを通じて Γ が \mathbb{C}^7 に作用する.

レベル 2 への制限: この Γ -作用をレベル 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ に制限する.

$$\Gamma(2) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \Gamma : \begin{array}{l} a \equiv d \equiv 1 \pmod{2} \\ b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \end{array} \right\}$$

対応する変換群: 対応する G の変換部分群は 2 乗合成変換 g_1^2, g_2^2, g_3^2 によって生成される群

$$G(2) = \langle g_1^2, g_2^2, g_3^2 \rangle$$

複素 3 次曲面の 4 パラメータ族

$$f(x, a) = x_1 x_2 x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \theta_1(a)x_1 - \theta_2(a)x_2 - \theta_3(a)x_3 + \theta_4(a).$$

但し $\theta_4(a) = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4$.

観察: $f(x, a)$ は G の作用で不変, 特に

$$S = \{(x, a) \in \mathbb{C}^7 : f(x, a) = 0\}$$

は G の作用で閉じている.

各 a 毎に: 各 $a \in \mathbb{C}^4$ を止める毎に

$$S(a) = \{x \in \mathbb{C}^3 : f_a(x) := f(x, a) = 0\}$$

は複素アフィン 3 次曲面を定義する.

→ S : 3 次曲面の 4 パラメータ族 を定義.

普遍族: 古典代数幾何により

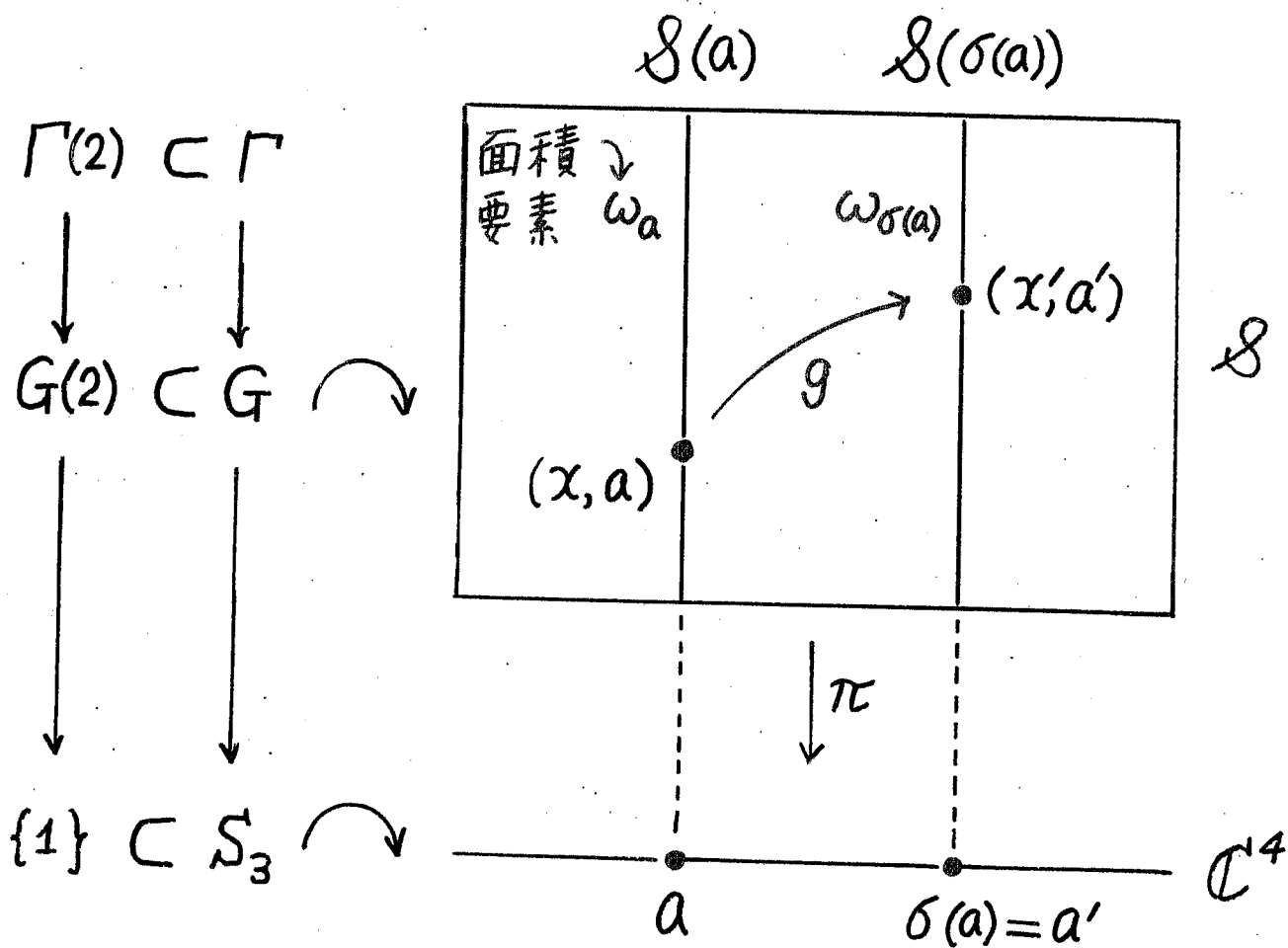
- 複素 3 次曲面の同型類のモジュライ数 = 4
- Cayley の標準形 (の成木・関口による書き換え)

⇕ 比較

4 パラメータ族 S も一般的なモジュライを捉える

\mathbb{P}_{VI} のパラメタ \cong 3 次曲面の moduli パラメタ

群作用の概念図



- full modular 群 Γ が変換群 G を通じて 3 次曲面族 $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}^4$ へ保測的に作用
- 3 次対称群 S_3 は底空間 \mathbb{C}^4 へ最初の 3 変数 (a_1, a_2, a_3) の置換として作用
- level 2 合同部分群 $\Gamma(2)$ が変換群 $G(2)$ を通じて各 3 次曲面 $S(a)$ へ保測的に作用

3 次曲面の Poincaré residue (複素面積要素)

曲面 $S(a)$ 上の複素 2 次形式 ω_a を次で定義：

$$\omega_a = \frac{dx_i \wedge dx_j}{y_k(x, a)}$$

但し (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換であり,

$$y_k(x, a) = \frac{\partial f_a}{\partial x_k} = 2x_k + x_i x_j - \theta_k(a).$$

注意 1: ω_a は巡回置換の取り方によらない。それは

$df_a = y_i dx_i + y_j dx_j + y_k dx_k = 0$ on $S(a)$
なる関係式から容易に従う。

注意 2: ω_a が定義できない点 $x \in S(a)$ とは

$$y_i(x, a) = y_j(x, a) = y_k(x, a) = 0$$

なる点, 即ち $S(a)$ の特異点に他ならない。特異点については後述する。

保測性: modular 群の作用 $G \curvearrowright S$ は保測的である。即ち G の変換 $g: S(a) \rightarrow S(\sigma(a))$ に対して

$$\omega_a = g^* \omega_{\sigma(a)}$$

偶然 or 必然の一致

表現空間 \longleftrightarrow 3 次曲面

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{S}$$

$$\cup \cup$$

$$\mathcal{R}_t(a) = \mathcal{S}(a)$$

symplectic 構造 \longleftrightarrow Poincaré residue

$\Omega_{\mathcal{R}_t(a)}$	$=$	ω_a
-----------------------------	-----	------------

純 braid 群 \longleftrightarrow level 2 modular 群
 P_3 の作用 $\Gamma(2)$ の作用

注意: 厳密にいうと違いは次の通り.

$$\mathcal{R}_t \cong SL_2(\mathbb{C})^3 / \text{Ad}(SL_2(\mathbb{C}))$$

(集合論的商)

$$\mathcal{S} \cong SL_2(\mathbb{C})^3 // \text{Ad}(SL_2(\mathbb{C}))$$

(圏論的商)

$$= \text{Spec } \mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})^3]^{\text{Ad}(SL_2(\mathbb{C}))}$$

3 種類のパラメータの関係

$$\kappa \mapsto a \mapsto \theta$$

- $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_4) \mapsto a = (a_1, \dots, a_4)$:

$$\begin{cases} a_i = 2 \cos \pi \kappa_i & (i = 1, 2, 3) \\ a_4 = -2 \cos \pi \kappa_4 \end{cases}$$

- $a = (a_1, \dots, a_4) \mapsto \theta = (\theta_1, \dots, \theta_4)$:

$$\begin{cases} \theta_i = a_i a_4 + a_j a_k & (i = 1, 2, 3) \\ \theta_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4 \end{cases}$$

観察: $(\theta_1, \dots, \theta_4)$ は $(\kappa_1, \dots, \kappa_4)$ の関数として
 $D_4^{(1)}$ 型 affine Weyl 群 $W(D_4^{(1)})$ 不変式環の基底

↓

P_{VI} の $W(D_4^{(1)})$ 対称性 (Bäcklund 変換群)

群 $W(D_4^{(1)})$: パラメータ空間 \mathbb{C}_κ^4 に働く鏡映群

$$W(D_4^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$$

s_0 : 超平面 $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 1$ に関する鏡映

s_j : 超平面 $\kappa_j = 0$ に関する鏡映 ($j = 1, 2, 3, 4$)

$$\text{基本関係式} \quad s_i^2 = (s_0 s_j)^3 = (s_j s_k)^2 = 1$$

3 次曲面の特異点

判別式: $S(a)$ が特異点を含む $\iff \Delta(a) = 0$,

$$\Delta(a) = w(a)^2 \prod_{i=1}^4 (a_i^2 - 4)$$

$$w(a) = \prod_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1} (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + a_4) - \prod_{i=1}^3 (a_i a_4 - a_j a_k)$$

但し $\varepsilon_i = \pm 1$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とする.

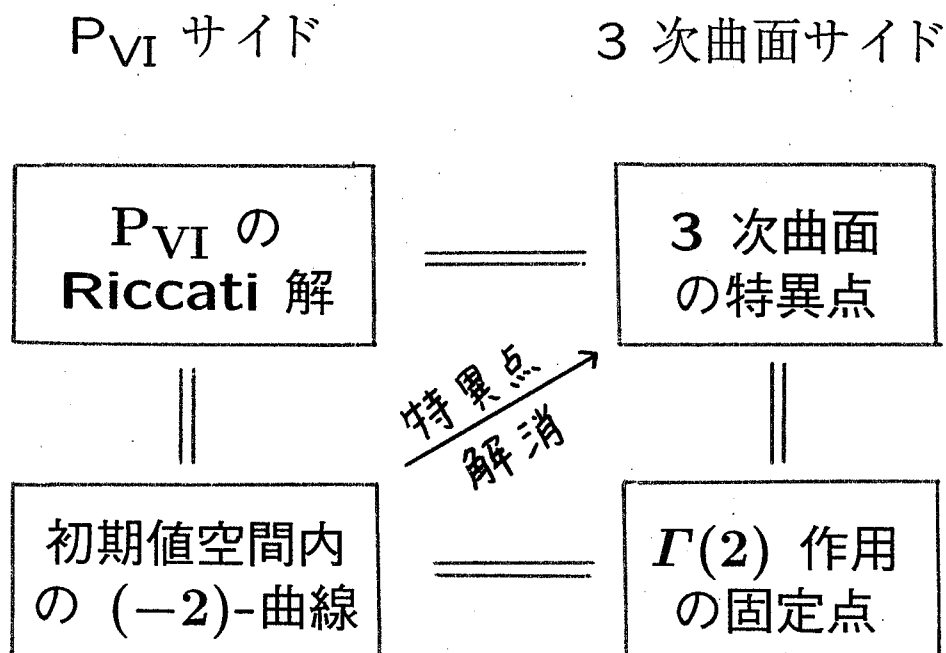
単純孤立特異点: $\Delta(a) = 0$ なるとき, 曲面 $S(a)$ は有限個の特異点を持ち, それらは単純孤立特異点.

特異点の **Dynkin** 型: 可能な特異点の型は下表

例外曲線の本数	4	3	2	1
特異点の Dynkin 型	D_4 $A_1^{\oplus 4}$	A_3 $A_1^{\oplus 3}$	A_2 $A_1^{\oplus 2}$	A_1

注意: 特異点と P_{VI} の **Riccati** 解 — Gauss 超幾何関数で表わせる解 — の間には密接な関係

四位一体



用語の解説

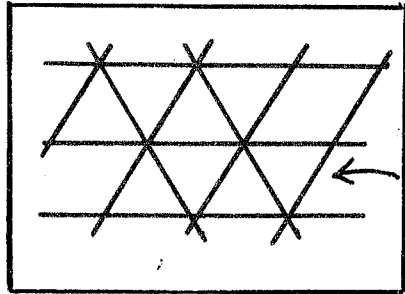
Riccati 解: $P_{VI}(\kappa)$ のパラメータ κ が \mathbb{C}_κ^4 の $W(D_4^{(1)})$ 作用に関する鏡映面上にあるとき, $P_{VI}(\kappa)$ は Riccati 方程式を含む. これを線型化すると超幾何方程式が得られ, 超幾何関数解が構成できる.

初期値空間: ナイーブには $P_{VI}(\kappa)$ の解をパラメトライズする複素曲面.

(-2)-曲線: \mathbb{P}^1 と同型で自己交叉数 -2 の複素曲線.

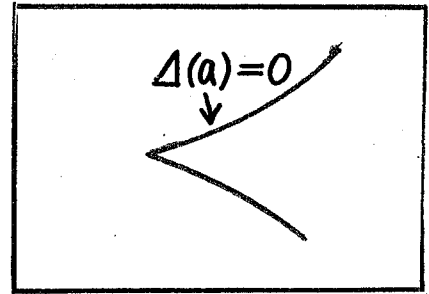
Riccati 解と特異点

パラメータ空間の対応



K -空間

\xrightarrow{RH}



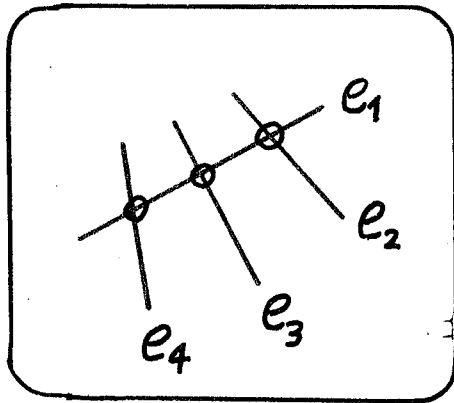
a -空間

(本当は θ -空間)

初期値空間 \leftrightarrow 3 次曲面の対応

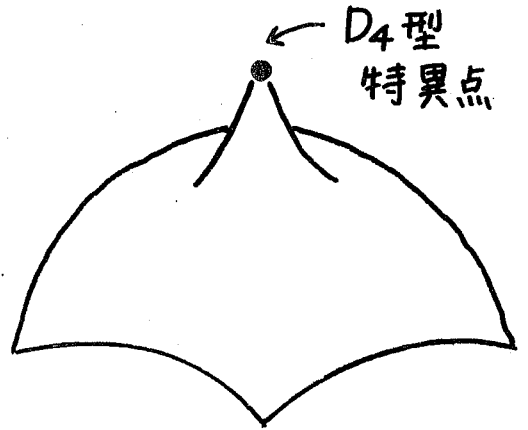
($\Delta(a) = 0$ なる a とその上にある κ を固定)

一例

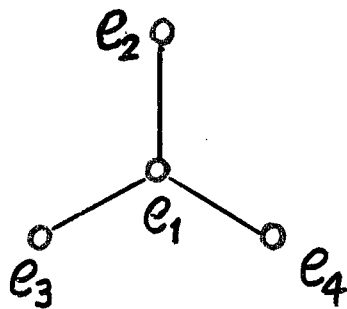


$P_{VI}(\kappa)$ の初期値空間

特異点
解消
 \xrightarrow{RH}



$S(a)$



D_4 型 Dynkin 図

$e_i \cong \mathbb{P}^1$: 例外曲線

$e_i \cdot e_i = -2$ (自己交叉数)

(-2) -曲線 \leftrightarrow Riccati 解

Fuchs 型方程式 (再論)

Schrödinger 作用素 $L : \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}(1) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}(-3)$,

$$L = -(d/dz)^2 + Q(z),$$

$$Q(z) = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\kappa_i^2 - 1}{4(z - t_i)^2} + \frac{H_i}{z - t_i} \right\} + \frac{3}{4(z - q)^2} - \frac{p}{z - q}$$

特異点	$z = t_i$	$z = q$
特性指数	$(1 \pm \kappa_i)/2$	$(1 \pm 2)/2$
備考	確定特異点	みかけの特異点

Hamiltonian: みかけ条件より H_i が決まる.

$$H_i = \frac{q_i}{t_{ij}t_{ik}} \left\{ q_j q_k p^2 - (q_j + q_k)p + \alpha - \sum_{l=1}^3 \frac{\kappa_l^2 - 1}{4} \frac{q_m q_n}{q_i q_l} \right\}$$

記号: $\{i, j, k\} = \{l, m, n\} = \{1, 2, 3\}$. また

$$t_{ij} = t_i - t_j, \quad q_i = q - t_i,$$

$$\alpha = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \kappa_4^2 + 1)/4.$$

Fuchs 型方程式の空間 (再論)

- $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \mathbb{C}^4$ に対し,

$\mathcal{E}_\kappa = \{\text{先の Schrödinger 作用素 ; 指数差 } \kappa\}$.

- $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$ に対し,

$$\mathcal{E}(a) = \coprod_{\kappa} \mathcal{E}_\kappa / \sim$$

但し和は次の条件を満たす可算個の κ 全体に互る:

$$\begin{cases} a_i = 2 \cos \pi \kappa_i & (i = 1, 2, 3) \\ a_4 = -2 \cos \pi \kappa_4 \end{cases}$$

また $/\sim$ は \mathcal{E}_κ たちを Schlesinger 変換で貼り合わせることを意味する.

Schlesinger 変換: Bäcklund 変換のうち $W(D_4^{(1)})$ の平行移動部分群 (lattice) に対応する変換.

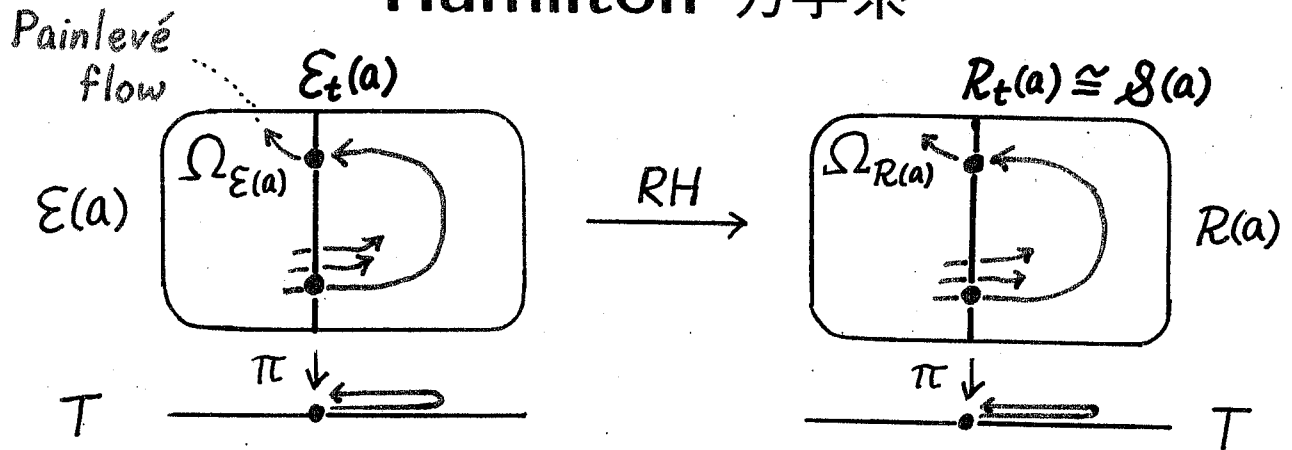
$\mathcal{E}(a)$ 上の基本 2 次形式 $\Omega_{\mathcal{E}(a)}$

$\mathcal{R}(a)$ 上の基本 2 次形式を Riemann-Hilbert 対応

RH: $\mathcal{E}(a) \rightarrow \mathcal{R}(a)$ で $\mathcal{E}(a) \curvearrowright$ 引き戻したもの:

$$\Omega_{\mathcal{E}(a)} = \text{RH}^* \Omega_{\mathcal{R}(a)}$$

Hamilton 力学系



基本 2 次形式: de Rham により計算すると,

$$\Omega_{\mathcal{E}(a)} = dq \wedge dp - \sum_{i=1}^3 dH_i \wedge dt_i.$$

Hamilton 方程式: P_{VI} 葉層に沿うベクトル場 V に対する条件 $\iota_V \Omega_{\mathcal{E}(a)} = 0$ は Hamilton 方程式

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q}}$$

を生む。これが **Painlevé VI** に他ならない。

Poincaré map: 連続 Hamilton 系の return map として離散 Hamilton 系 (Poincaré map) が得られる。これが P_{VI} の非線型モノドロミーに他ならない。更にこれを Riemann-Hilbert 対応を通じて 3 次曲面上の保測離散力学系として表現したものが我々のモジュラー群作用である。

3 次曲面上の離散力学系

問題： モジュラー群の 3 次曲面への作用を離散力学系として研究せよ.

- (1) 固定点を分類せよ (Riccati 解)
- (2) 有限軌道を分類せよ (代数関数解)
- (3) 有界軌道を分類せよ (ある種の超越解)

Julia 集合: $a \in \mathbb{C}^4$ に対して

$$K(a) = \{x \in \mathcal{S}(a) : x \text{ を通る } \Gamma(2) \text{ 軌道が有界} \}$$

$$J(a) = \partial K(a) : K(a) \text{ の境界}$$

$K(a)$: 充填 Julia 集合, $J(a)$: Julia 集合.

Mandelbrot 集合: Julia 集合 $J(a)$ の位相のパラメータ a に対する依存性を調査することにより, 何らかの適切な意味でパラメータ空間上に Mandelbrot 集合 \mathcal{M} を定義し, その性質を調べよ.