
超弦理論とモジュライ空間の幾何学

課題番号 : (12440008)

平成12年度～平成14年度科学研究費補助金

(基盤研究(B)(1)) 研究成果報告書

平成15年3月

研究代表者 齋藤 政彦
(神戸大学 理学部 数学教室)

はしがき

研究課題「超弦理論とモジュライ空間の幾何学」に対して、平成12年、13年、14年度の3カ年度にわたって、科学研究費補助金（基盤研究（B）(1)）が交付された。この小冊子はその研究成果報告書である。

この補助金により、カラビ・ヤウ多様体のグロモフ・ウイッテン不変量とBPS不変量・Gopakumar-Vafa予想、ホモロジカルミラー対称性と導来圏の幾何学、パンルベ方程式の初期値空間の代数幾何学・岡本・パンルベ対の変形理論、Painlevé方程式とその拡張についてのLie理論的研究およびその離散化、ベクトル束のモジュライ空間とその対称性、不変式論の新たな展開、正標数または代数体上のカラビ・ヤウ多様体の数論幾何的研究に関して多くの成果を得た。また、種々の研究集会を開催し、国外へ研究者への派遣および国外の研究者の招聘を行い、国内外の研究者との研究交流を行った。

これらの成果により、研究課題の目的であった「超弦理論」から示唆されたモジュライ空間の幾何学の新しい数学的構造の解析や、さらに超弦理論の対称性から示唆されたモジュライ空間の間の数学的関係の解明という当初の目的に対しては、まだ路半ばではあるが、多くの注目に値する進展があった。

研究組織（平成12年度 - 平成14年度）

研究代表者	齋藤 政彦	（神戸大学理学部・教授）
研究分担者		
	野海 正俊	（自然科学研究科・教授）
	山田 泰彦	（神戸大学理学部・教授）
	吉岡 康太	（神戸大学理学部・助教授）
	向井 茂	（京都大学数理解析研究所・教授）
	深谷 賢治	（京都大学・理学研究科・教授）
	小野 薫	（北海道大学・理学研究科・教授）
	細野 忍	（東京大学・数理科学研究科・助教授）
	高橋 篤史	（京都大学・数理解析研究所・助手）
	後藤 泰宏	（北海道教育大学大学・教育学部函館分校・助教授）
	野呂 正行	（神戸大学・理学部・教授）

[海外共同研究者]

R. Y. Donagi (Univ. of Pennsylvania, Professor)

研究経費

平成12年度	820万円
平成13年度	400万円
平成11年度	390万円
合計	1610万円

研究発表

A: 学術論文

1. M.-H. Saito and H. Terajima, *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations*, Preprint. 2002, Jan. math.AG/0201225.
2. M.-H. Saito and T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé Pairs*, to appear in Kobe J. Math., **19**, (2002), 21–50.
3. M.-H. Saito, T. Takebe and H. Terajima, *Deformation of Okamoto–Painlevé Pairs and Painlevé equations*, Jour. of Algebraic Geometry, **11** (2002), 311–362.
4. M.-H. Saito, N. Yui, The modularity conjecture for rigid Calabi–Yau three-folds over \mathbf{Q} , J. Math. Kyoto Univ., 41-2, (2001), 403–419.
5. S. Hosono, M.-H. Saito and A. Takahashi, Relative Lefschetz action and BPS state counting, Internat. Math. Res. Notices, (2001), No. 15, 783–816.
6. M.-H. Saito, H. Umemura, Painlevé equations and deformations of rational surfaces with rational double points, Proceedings of the Nagoya Int. Workshop, *Physics and combinatorics*, Nagoya University, 1999, World Scientific, Kirillov, A. et al (eds.). 320–365, 2000.
7. M. Noumi and Y. Yamada A new Lax pair for the sixth Painlevé equation associated with $\hat{so}(8)$, in *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis* (Eds. T.Kawai and K.Fujita), pp. 238–252, World Scientific, 2002. (math-ph/0203029).
8. M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada: Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems, Funkcial. Ekvac. **45**(2002), 237–258.
9. K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada Discrete dynamical systems with $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ symmetry, Lett. Math. Phys. **60**(2002), 211–219.
10. M. Noumi, Affine Weyl group approach to Painlevé equations, in *International Congress of Mathematicians (2002, Beijing)*, (Ed. LI Tatsien), Proceedings of the International Congress of Mathematicians August 20–28, 2002, Beijing, pp. 497–509, Higher Education Press, Beijing, 2002.
11. M. Noumi, An introduction to birational Weyl group actions, in *Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives* (Ed. S.Fomin), Proceeding of the NATO ASI held in Cambridge, U.K., June 25–July 6, 2001, pp. 179–222, Kluwer Academic Publishers, 2002.
12. K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada A study on the fourth q -Painlevé equation, J. Phys. A : Math. Gen. **34**(2001), 8563–8581.
13. K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: Determinant formulas for the Toda and discrete Toda equations, Funkcial. Ekvac. **44**(2001), 291–307.

14. J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada: Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions, in *Physics and Combinatorics 2000*, Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop (Eds. A.N. Kirillov and N. Liskova), pp. 180–195, World Scientific, 2001.
15. M. Noumi and Y. Yamada Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra, in *Physics and Combinatorics 1999*, Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop (Eds. A.N. Kirillov, A. Tsuchiya and H. Umemura), pp. 287–319, World Scientific, 2001.
16. M. Noumi and Y. Yamada: Affine Weyl group symmetries in Painlevé type equations, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear or non-linear* (Eds. C.J. Howl, T. Kawai, Y. Takei), Kyoto University Press, Kyoto, 2000, pp 245–259.
17. Y. Kajihara and M. Noumi: Raising operators of row type for Macdonald polynomials, *Compositio Mathematica* **120**(2000), 119–136.
18. G.Hatayama, A.Kuniba, M.Okado, T.Takagi, Y. Yamada, "Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases", Recent developments in infinite-dimensional Lie algebras and conformal field theory (Charlottesville, VA, 2000), 151–182, *Contemp. Math.*, 297, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
19. S.Mizoguchi, Y. Yamada, " $W(E_{10})$ symmetry, M-theory and Painlevé equations", *Phys. Lett. B* 537 (2002), 130–140.
20. A.Kuniba, M.Okado, J.Suzuki, Y. Yamada, "Difference L operators related to q-characters", *J. Phys. A* 35 (2002), 1415–1435.
21. K.Fukuda, M.Okado, Y. Yamada, "Energy Functions in Box Ball Systems", *Internat. J. Modern Phys. A* 15 (2000) 1379-1392.
22. M.Fukae, Y. Yamada, S.-K.Yang, "Mordell-Weil Lattice via String Junctions", *Nuclear Phys. B* 572 (2000) 71-94.
23. Y. Yamada, S.-K.Yang, "Affine 7-brane Backgrounds and Five-Dimensional E_N Theories on S^1 ", *Nuclear Phys. B* 566 (2000) 642-659.
24. Y. Yamada, "A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation", *Physics and combinatorics, 2000 (Nagoya)*, 305–319, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.
25. T. Kawai, K. Yoshioka, *String partition functions and infinite products*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000).
26. K. Yoshioka, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, *Math. Ann.* **321** (2001), 817–884, math.AG/0009001
27. K. Yoshioka, *Twisted stability and Fourier-Mukai transform I*, *Compositio Math.* to appear

28. K. Yoshioka, *Twisted stability and Fourier-Mukai transform II*, Manuscripta Math. to appear
29. K. Yoshioka, *A note on Fourier-Mukai transform*, math.AG/0112267
30. N. Onishi, K. Yoshioka, *Singularities on the 2-dimensional moduli spaces of stable sheaves on K3 surfaces*, preprint, math.AG/0208241
31. S. Mukai, Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, RIMS preprint #1343, (2001).
32. S. Mukai, Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, RIMS preprint #1372, (2002).
33. S. Mukai, Vector bundles on a K3 surface, Proc. Int'l Cong. Math., Vol. 2, pp. 495-502, Higher Education Press, Beijing, 2002.
34. S. Mukai, Curves and symmetric spaces II, RIMS preprint #1372, (2003), 1月.
35. K. Fukaya, Floer homology and mirror symmetry. II. Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999), 31–127, Adv. Stud. Pure Math., 34, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
36. K. Fukaya, Mirror symmetry of abelian varieties and multi-theta functions. J. Algebraic Geom. 11 (2002), no. 3, 393–512.
37. K. Fukaya, Floer homology and mirror symmetry. I. Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), 15–43, AMS/IP Stud. Adv. Math., 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001
38. K. Fukaya, K. Ono, Floer homology and Gromov-Witten invariant over integer of general symplectic manifolds—summary. Taniguchi Conference on Mathematics Nara '98, 75–91, Adv. Stud. Pure Math., 31, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.
39. K. Ono, Space of geodesics on Zoll three-spheres, Advanced Studies in Pure Mathematics 34, (Minimal Surfaces, Geometric Analysis and Symplectic Geometry, Edited by K. Fukaya, S. Nishikawa and J. Spruck), 2002, pp 237-243.
40. K. Ono, Simple singularities and symplectic fillings, Contemporary Mathematics 309, (Integrable Systems, Topology and Physics, Edited by M. Guest, R. Miyaoka and Y. Ohnita), 2002, pp. 195-197.
41. S. Hosono, B.H. Lian, K. Oguiso and S.-T. Yau, *Autoequivalences of a K3 surface and monodromy transformations* to be published in Jour. Alg. Geometry.
42. S. Hosono, B.H. Lian, K. Oguiso and S.-T. Yau, *Fourier-Mukai partners of a K3 surface of Picard number one*, to appear in the proceedings for “Conference on Hilbert schemes, vector bundles and their interplay with representation theory”, Columbia, Missouri Contemp. Math.

43. S. Hosono, *Counting BPS states via holomorphic anomaly equations*, to be published in Fields Institute Communications.
44. S. Hosono, *Local Mirror Symmetry and Type IIA Monodromy of Calabi-Yau Manifolds*, Adv. Theor. Math. Phys. **4**(2000) 335-376.
45. A. Takahashi, A note on BPS invariants on Calabi-Yau 3-folds Proceedings related to the activity on “Frobenius manifolds, quantum cohomology and singularities”, Mac Planck Institute Bonn (2002)
46. Y. Goto, On the Néron-Severi Groups of Some $K3$ Surfaces, The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, Canada), CRM Proc. and Lecture Notes, vol. 24, AMS, 2000, pp. 305–328.
47. Y. Goto, A note on the height of the formal Brauer group of a $K3$ surface, April 2002, to appear in the Canadian Mathematical Bulletin.
48. Y. Goto, $K3$ surfaces with symplectic group actions, August 2002, to appear in the Proceedings of the Workshop on “Arithmetic, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry,” (Fields Institute, Canada, July 23-29, 2001), AMS.
49. Y. Goto, One-parameter families of $K3$ surfaces in positive characteristic, Proc. of Workshop on Number Theory 2001, Inst. of Math, Waseda University, pp. 55–64.
50. M. Noro, *A Computer Algebra System: Risa/Asir*, Algebra, Geometry and Software, M. Joswig and N. Takayama (eds.), Springer, 147-162, 2002.
51. M. Noro, *An Efficient Modular Algorithm for Computing the Global b -function*, in Proceedings of ICMS2002, World Scientific, 147–157, 2002.
52. M. Noro and K. Yokoyama, *Yet Another Practical Implementation of Polynomial Factorization over Finite Fields*, in Proceedings of ISSAC2002, ACM Press, 200–206, 2002.
53. M. Maekawa, M. Noro, K. Ohara, N. Takayama and Y. Tamura, *The Design and Implementation of OpenXM-RFC 100 and 101*, in Proceedings of ASCM2001, World Scientific, 102–111, 2001.

B: 口頭発表

1. 齋藤 政彦, Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations. RIMS Project 1999/2000, Algebraic Geometry and Integrable Systems related to string theory. June, 12, 2000. 60 minutes talk.
2. 齋藤 政彦, Algebraic Geometry of Painlevé equations I, II, Geometry of Moduli Spaces, Japan-Britain Joint Research Project 2000 at Warwick, July 19, 21, 2000. Seminar Talk.
3. 齋藤 政彦, Symmetries of affine Weyl groups of Painlevé equations, Geometry of Moduli Spaces, Japan-Britain Joint Research Project 2000 at Warwick, August 3, 2000. Conference Talk.
4. 齋藤 政彦, Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations, WORKSHOP ON ALGEBRAIC GEOMETRY AND PHYSICS, ALGEBRAIC GEOMETRY AND INTEGRABLE SYSTEMS, SISSA, Trieste, October 16-19, 2000.
5. 齋藤 政彦, Symmetries of Painlevé equations, Okamoto-Painlevé pairs and rational double points, Singularity Theory workshop, APPLICATIONS TO QUANTUM FIELD THEORY, 23 October - 27 October 2000, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK.
6. 齋藤 政彦, Deformations of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations, Arithmetic and Algebraic Geometry, University of Tokyo, 2001, organized by T. Katsura, Jan. 15–18., Jan. 15.
7. 齋藤 政彦, *Relative Lefschetz action and BPS state counting via moduli of sheaves' (I)*, invited talk at 4th SIGRAV GRADUATE SCHOOL ON CONTEMPORARY RELATIVITY AND GRAVITATIONAL PHYSICS and 2001 SCHOOL ON ALGEBRAIC GEOMETRY AND PHYSICS (SAGP2001), Villa Olmo (Como, Italy), May 7–11, 2001
8. 齋藤 政彦, *Relative Lefschetz action and BPS state counting*, invited talks at the China International Conference on Symplectic Geometry and Topology, Sichuan University, Nankai University, and Peking University, China, 2001 June 24, –July 6.
9. 齋藤 政彦, *Relative Lefschetz action and BPS state counting*, Invited Talk at Workshop on Arithmetic, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry, The Fields Institute, (Tronto, Canada), July 23-29, 2001
10. 齋藤 政彦, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*, Invited Talk at Workshop on Arithmetic, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry, The Fields Institute, (Tronto, Canada), July 23-29, 2001
11. 齋藤 政彦, *Deformation of logarithmic symplectic manifolds and Painlevé equations*, Invited talk at the International Conference on Geometry of Moduli Spaces and Integrable Systems, RIMS, Kyoto University, September, 3 (Mon) – 7 (Fri), 2001

12. 齋藤 政彦, Deformation of logarithmic symplectic manifolds and equations of Painlevé type, Invited talk at International Workshop on Moduli, Nagoya University, Graduate School of Mathematics, Nov. 12–14, 2001.
13. 齋藤 政彦, *Painlevé equations and deformation of rational double points*, International workshop on Categorical Algebra, Deformation Theory and Field Theory, Kyoto University, Jan. 7–Jan 11, 2002.
14. 齋藤 政彦, M.-H. Saito: Geometric characterizations of equations of Painlevé type, Workshop on Frobenius manifolds, quantum cohomology, and singularities dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday, July 8-19, 2002, MPIM, Bonn, Germany. (招待講演).
15. 齋藤 政彦, *Moduli space of flat connections and Affine Weyl groups* KOREA-JAPAN JOINT WORKSHOP in MATHEMATICS, Algebraic Geometry and Related Topics, November 26-28 (Tues-Thur), 2002, KIAS, Seoul, Korea
16. 齋藤 政彦, 対数的シンプレクテック多様体の変型とパンルベ型方程式, (2001年代数シンポジウム報告集, 大阪大学理学研究科, 2001年8月1日)
17. 齋藤 政彦, 「対数的 Symplectic 多様体の変形とパンルベ型方程式系」, 研究集会「開 Calabi-Yau 多様体への代数幾何と弦理論からのアプローチ」, 2001年12月11日(火曜日) 12月14日(金曜日), 北海道大学大学院理学部数学教室
18. 齋藤 政彦, 「対数的シンプレクテック多様体の変型とパンルベ方程式系」. 日本数学会 年会、関数方程式分科会 特別講演 2002年3月28日(木)
19. 齋藤 政彦, *The Gromov-Witten invariants and BPS states countings, –A Gopakumar-Vafa conjecture*, The 4th Postech Algebraic Geometry Winter School on Frobenius Manifolds and Singularity Theory, 26-29 January, 2003 (4 days), The Kolon Hotel in Gyeong-ju (Kyung-ju), KOREA. (連続講義).
20. 野海正俊, Nonlinear difference systems arising from affine root system, International Mini-Symposium on Hypergeometric Functions and Applications, Nagoya University, Japan, February 14–16, 2000.
21. M. Noumi and Y. Yamada, Discrete integrable systems and special polynomials arising from affine root systems, May 31, 2000, NATO ASI: *Special Functions*, Arizona State University May 29– June 9, 2000.
22. 野海正俊, Symmetry of Painlevé equations and a birational realization of Weyl groups, Colloquium at The Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Vienna, July 12, 2000,
23. M. Noumi and Y. Yamada, Birational realization of Weyl groups and discrete integrable systems, MSJ-IRI 2000: Integrable Systems in Differential Geometry, Tokyo, July 17–21, 2000.
24. 野海正俊, Weyl group actions arising from nilpotent Poisson algebras, International Workshop on Physics and Combinatorics 2000, Nagoya University, Japan, August 21–26, 2000

25. K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, Symmetry of the q -Painlevé IV equation, SIDE 4, Tokyo, November 27 – December 1, 2000.
26. 野海正俊, Affine Weyl groups and integrable systems, MathPhys Odyssey 2001: *Integrable Models and Beyond*, Okayama, Hayashibara Institute, February 19–21, 2001.
27. 野海正俊, q -Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type A , Workshop on Orthogonal Polynomials and Related Topics, organized by K. Aomoto and A.N. Kirillov, May 24, 2001, Nagoya University.
28. 野海正俊, Three lectures on “Weyl group approach to nonlinear integrable systems” (June 25, 26 28, 2001), NATO-ASI Symmetric Functions 2001: *Surveys of Developments and Perspectives*, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, June 25 – July 6, 2001
29. 野海正俊, Birational Weyl group actions, discrete integrable systems and tropical combinatorics (August 9, 2001), MSJ-IRI 2001: *Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups*, Sophia University, Tokyo, August 1–10, 2001.
30. 野海正俊, q -Painlevé equations arising from a discrete version of the modified KP hierarchy (August 16, 2001), International Workshop on “Integrable Models, Combinatorics and Representation Theory”, Kansai Seminar House, Kyoto, August 12–16, 2001.
31. 野海正俊, Birational Weyl group actions and their applications I, II (August 30, 2001), *School on Geometry of Moduli spaces and Integrable Systems*, organized by M.-H. Saito and Y. Ohyama, Piazza Oumi, Ohtsu, August 29 – 31, 2001.
32. 野海正俊, q -Painlevé equations arising from a q -version of the modified KP hierarchy (September 4, 2001), EuroWorkshop : *Discrete systems and integrability*, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, September 3–14, 2001.
33. 野海正俊, The sixth Painlevé equation and the Umemura polynomials (November 28, 2001), *Prospect of Generalized Functions*, RIMS, Kyoto University, November 27–30, 2001.
34. 野海正俊, Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions, CRM Workshop: *Computational Lie Theory*, CRM, Montreal, Canada, May 27–June 10, 2002.
35. 野海正俊, Some remarks on the discrete symmetry of Painlevé equations, Workshop on Frobenius manifolds, quantum cohomology and singularities, Max-Planck Institute in Bonn, July 8–19, 2002. (July 12, 2002)
36. 野海正俊, q -Painlevé systems arising from a q -difference analogue of the KP hierarchy, The 24th Group Theoretical Method in Physics, Paris, July 14–20, 2002. (July 17, 2002)

37. 野海正俊, Affine Weyl group symmetries in Painlevé equations and discrete Painlevé equations, Invited Lecture at International Congress of Mathematicians 2002, in Section 13: Mathematical Physics, Beijing University, China, August 20–28, 2002. (August 26, 2002)
38. 国場, 尾角, 山田, " C_2 の差分 L 演算子が生成する q -指標について" 2001 年度 (春) 日本数学会一般講演 (3 月 26 日, 慶應大学)
39. 国場, 尾角, 山田, " q -指標と Weyl 群のトロピカル表現: C_2 case" 2001 年度 (春) 日本数学会一般講演 (3 月 26 日, 慶應大学)
40. 山田, "トロピカル R 行列" 2001 年 9 月 26 日, 東京無限解析セミナー (新潟)
41. 梶原, 野海, 山田, " q -Painlevé III 方程式とその特殊解" 2001 年度 (秋) 日本数学会一般講演 (10 月 4 日, 九州大学)
42. 山田, "Tropical GL-GL duality" 2001 年 12 月 8 日, 箱玉系研究会 (東京大学)
43. 国場, 尾角, 高木, 山田, "Geometric crystal and soliton cellular automata I, II" 2002 年度 (春) 日本数学会一般講演 (3 月 29 日, 明治大学)
44. 野海, 山田, "Tropical RSK correspondence" 2002 年度 (春) 日本数学会一般講演 (3 月 29 日, 明治大学)
45. 国場, 尾角, 高木, 山田, "箱玉系の逆散乱法と正準分配関数" 2002 年度 (秋) 日本数学会一般講演 (9 月 25 日, 島根大学)
46. 国場, 尾角, 高木, 山田, " A 型幾何クリスタルとトロピカル R " 2002 年度 (秋) 日本数学会一般講演 (9 月 25 日, 島根大学)
47. 山田, "箱玉頂点作用素" 2002 年 10 月 4 日, 東京無限解析セミナー (新潟).
48. 吉岡康太, *Brill-Noether problem for sheaves on K3 surfaces* (Algebraic Geometry and Integral Systems related to String Theory, 数理解析研究所), 2000 年 6 月 12 日 – 6 月 16 日
49. 吉岡康太, *Moduli of sheaves on K3 and abelian surfaces* (Warwick University), August 2000
50. 吉岡康太, *Fourier-Mukai transform and moduli of bundles on K3 surfaces* (Algebraic Geometry and Integrable systems, SISSA, Trieste, Italy), October 16–19, 2000
51. 吉岡康太, *On "Euler characteristics" of moduli of vector bundles* (Geometry of Moduli Spaces, 関西セミナーハウス) 2000 年 11 月
52. 吉岡康太, *Moduli of vector bundle on ruled surfaces* (Arithmetic and Algebraic Geometry, 東京大学大学院数理科学研究科) 2001 年 1 月 15 日 – 1 月 18 日
53. 吉岡康太, *A note on moduli of vector bundles on rational surfaces* (Algebraic geometry in East Asia, International Institute for Advanced Studies, Kyoto) August 3–10, 2001

54. 吉岡康太, *Twisted stability and Mukai transform* (Vector bundles on algebraic curves 2001, Roma III, Italy) September 11–15, 2001
55. 吉岡康太, *A note on Fourier-Mukai transform*, ICM2002 Satellite Conference in Algebraic Geometry, Shanghai East China Normal University, August 13–17, 2002
56. 吉岡康太, *Singularities of two-dimensional moduli spaces of sheaves on K3 surfaces*, School and conference on intersection theory and moduli, ICTP, Trieste, Italy, September, 9–25, 2002
57. 吉岡康太, *Singularities of two-dimensional moduli spaces of sheaves on K3 surfaces*, Hong Kong Univeresity of Science and Technology, Hong-Kong, November, 28, 2002
58. 吉岡康太, 捻れた安定性と向井変換, (代数幾何学シンポジウム、城崎大会議館), 2001年10月
59. 吉岡康太, K3 曲面上の安定層がなすモジュライ空間の 2次元成分の特異点について, 代数幾何学シンポジウム (高次元多様体や、正標数に関わる幾何学), 九州大学, 2003年1月14日(火)–1月17日(金)
60. 向井茂, Verlinde 公式とベルヌーイ数の幾何学, 数理解析研究所短期共同研究「組合せ論的表現論をめぐる話題」, 京都大学数理解析研究所, 2000年10月
61. 向井茂, モジュライ理論の回顧と展望 - Hilbert の定理から Verlinde 公式へ, 2001年度日本数学会年会企画特別講演, 慶応大学, 2001年3月
62. 向井茂, On Nagata's example of infinitely generated ring of invariants (永田の無限生成不変式環の例について), 第46回代数学シンポジウム, 2001年8月
63. 向井茂, On Hilbert's fourteenth problem for the 2-dimensional additive group (2次元代数群に対する Hilbert 第14問題について), 2002年度日本数学会年会一般講演, 明治大学, 2002年3月
64. 向井茂, Vector bundles on a K3 surface, 国際数学会議招待講演、北京、2002年8月.
65. 向井茂, (内藤弘嗣と共同発表) 2次元加法群の作用によるある不変式環について、2002年度日本数学会年会一般講演, 島根大学, 2002年9月
66. 向井茂, 不変式論と双有理幾何、代数幾何学シンポジウム、九州大学、2003年1月.
67. 向井茂, Invariant ring of Nagata type and 'conformal blocks' over the projective plane (永田型の不変式環と射影平面上の共形ブロック), 2003年度日本数学会年会一般講演、東京大学、2003年3月
68. 小野 薫, Simple singularities and symplectic fillings, MSJ-IRI Workshop on Integrable systems in Differential Geometry, 東京大学 2000年7月

69. 小野 薫, Some progress in symplectic Floer theory, The third Asian Conference on Mathematics, Manila, Phillipines, October 2000.
70. 小野 薫, Obstruction theory for Lagrangian intersections and deformations of Lagrangian submanifolds, Workshop on Contact Geometry, Stanford University, December 2000.
71. 小野 薫, Obstruction theory for Lagrangian intersections and deformations of Lagrangian submanifolds, Symposium on Symplectic Geometry and Topology, Fields Institute for Mathematical Sciences, March 2001.
72. 小野 薫, Simple singularities and symplectic fillings, International Symposium on Symplectic Geometry, (Tianjin part), Nankai University, Tianjin, July 2001.
73. 小野 薫, Floer homology of periodic Hamiltonian systems with integer coefficient, Frobenius manifolds, singularities, and quantum cohomology, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany, July 2002.
74. 小野 薫, A_∞ -algebra and Floer homology for Lagrangian submanifolds, International Conference on Quantum Theory, 福岡市、2002年7月
75. 小野 薫, Symplectic fillings of isolated surface singularities, Franco-japanese conference on Singularity, CIRM, Luminy, Marseille, France, September 2002.
76. 小野 薫, 曲面上の孤立特異点のリンクのシンプレクティック・フィリングについて, リー群と多様体の理論, 上智大学、2002年10月
77. 細野 忍, *Counting BPS state on Rational Elliptic Surface*, ESI Program on “Duality in String Theory”, 2000年3月, Ervin Schödinger Institute of Mathematical Physics, Austria.
78. 細野 忍, *Mirror symmetry and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau manifolds*, Workshop “Geometry of Quantum Cohomology”, 2000年11月, 東京都立大学.
79. 細野 忍, *Type IIA monodromy and hypergeometric series in mirror symmetry*, Workshop “Geometry of Quantum Cohomology”, 2000年11月, 東京都立大学.
80. 細野 忍, *Introduction to GKZ hypergeometric system*, Workshop “Arithmetics, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry”, 2001年7月, Fields Institute, Toronto.
81. 細野 忍, *Monodromy transforms of hypergeometric series in (local) mirror symmetry*, Workshop “Arithmetics, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry”, 2001年7月, Fields Institute, Toronto.
82. 細野 忍, *Hypergeometric series and monodromy transforms in mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds*, Differential Geometry Seminar, 2001年10月, Harvard University

83. 細野 忍, *Fourier-Mukai partners and mirror symmetry of K3 surfaces*, Differential Geometry Seminar, 2002 年 2 月, Boston University; Workshop “Complex geometry and physics”, 2002 年 4 月, Bonn University; Workshop “ICM satellite conference: String theory workshop” 2002 年 8 月, Hangzhou University.
84. 細野 忍, *Counting BPS states via holomorphic anomaly equations*, Workshop “String theory workshop”, 2002 年 8 月, Morning side center for mathematics at Beijing.
85. 細野 忍, *Classification of $c=2$ rational conformal field theories via Gauss product*, Workshop “Categorical algebra, deformation theory and field theory II”, 2002 年 12 月, 京都大学
86. 高橋 篤史, Gromov-Witten invariants and moduli of sheaves Workshop on “Algebraic Geometry and Integrable Systems related to String Theory” 京都大学数理解析研究所 2000 年 6 月 15 日
87. 高橋 篤史, Relative Lefschetz Action and Gromov-Witten invariants Workshop on “Application of Singularity Theory to Quantum Field Theory” Newton Institute, Cambridge University, UK 2000 年 10 月 26 日
88. 高橋 篤史, Relative Lefschetz action and BPS state counting Workshop “Algebraic Aspects of Mirror Symmetry” Universitaet Kaiserslautern, Germany 2001 年 6 月 27 日
89. 高橋 篤史, Counting sheaves on Calabi-Yau 3-folds “Frobenius manifolds, quantum cohomology and singularities” Max Planck Institute for Mathematics, Bonn Germany 2002 年 7 月 18 日
90. 高橋 篤史, A construction of flat structures from tt^* geometry Workshop on “Categorical Algebra, Deformation theory and Field Theory II” 京都大学理学部数学教室 2002 年 12 月 17 日
91. 後藤泰宏, “Explicit computations on supersingular $K3$ surfaces,” Algorithmic Number Theory Seminar, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, 2000 年 11 月:
92. 後藤泰宏, “One-parameter families of $K3$ surfaces in positive characteristic,” 早稲田大学整数論シンポジウム, 早稲田大学, 001 年 3 月.
93. 後藤泰宏, “ $K3$ surfaces over finite fields with symplectic group actions,” Workshop on Arithmetic, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry, Fields Institute, Toronto, 2001 年 7 月.
94. 後藤泰宏, “Weighted projective varieties and arithmetic problems,” Department Colloquium, Dept. of Mathematics and Statistics, Queen’s University, Kingston, Canada, 2002 年 3 月.
95. 野呂正行, A computer algebra system Risa/Asir and OpenXM. Integration of Algebra and Gemmetry Software Systems, Schloss Dagstuhl, Germany (2001.11).

C: 著書

1. M. -H. Saito (編集): Proceedings of the workshop, Algebraic Geometry and Integrable Systems related to String Theory, RIMS, Kokyuroku, No. 1232, (2001).
2. 向井茂, 現代数学の展開 『モジュライ理論 2』 岩波書店、2000年.
3. 野海 正俊, パンルヴェ方程式 – 対称性からの入門, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000 (204 頁).

D: 研究代表者・分担者が関わったプロジェクト・研究集会

1. 組織員, 齋藤政彦, 国際研究集会「弦理論に関わる代数幾何と可積分系」数理解析研究所、6月12日–16日, 2000年, 組織委員.
2. 組織委員, 齋藤政彦, モノドロミ 保存変形と可積分系, 大津 ピアザ淡海 2000年12月8日–9日.
3. 齋藤政彦, School on GEOMETRY OF MODULI SPACES and Integrable Systems August 29 (Wed) –September 31 (Fri), 2001, Otsu, Piazza Oumi, 組織委員.
4. 組織委員 齋藤政彦, 山田泰彦, International Conference on Geometry of Moduli Spaces and Integrable Systems, 京大数理研, 2001年9月3日–7日, 組織委員.
5. 組織委員, 齋藤政彦, 深谷賢治, International Conference on Categorical Algebra, Deformation theory and Field Theory I, January 7 (Mon) –January 11 (Fri), 2002, Department of Mathematics, KYOTO UNIVERSITY. 組織委員. (深谷賢治).
6. 組織委員, 齋藤政彦, 深谷賢治, School on Mirror Symmetry in Kinosaki, (ミラー対称性城崎学校), September 8 (Sun)- 13 (Fri), 2002 Kinosaki Town Hall (兵庫県 城崎町総合福祉会館), Kinosaki, Hyougo, Japan. , (参加者は約50名).
7. 組織委員, 齋藤政彦, 深谷賢治, International Conference on Categorical Algebra, Deformation theory and Field Theory II, December 16 (Mon) –December 20 (Fri), 2002, Department of Mathematics, KYOTO UNIVERSITY. 組織委員. (深谷賢治).

研究成果概要

研究目的

本研究の目的は研究計画調書には以下のように記されている。

この研究の目的は近年数理物理学の「超弦理論」から示唆された多様体、多様体間の正則写像、またその上のベクトル束のモジュライ空間の幾何学の新しい数学的構造の解析を行い、さらに超弦理論の対称性から示唆されたモジュライ空間の間の関係を数学的に明らかにする事にある。具体的には研究期間の間に次の事を明らかにする事を目的とする。

1. :安定写像のモジュライ空間およびシンプレクティック幾何学による疑正則写像のモジュライによるグロモフ・ウィッテン不変量の定義を踏まえ、種々の多様体について一般種数の量子コホモロジー環の構造の具体的計算方法の確立する。
2. :カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性やそれを一般化した弦双対性の示唆する数学的構造の一致の数学的意味付けおよび厳密な証明を与える。
3. :アーベル多様体や $K3$ 曲面の族に対してベクトル束のモジュライ空間のフーリエ・向井変換を用いて与えられるベクトル束のモジュライ空間のコホモロジーと一般種数のグロモフ・ウィッテン不変量の関係の詳細な解析とその事の数理物理的意味付けを与える。
4. :特殊な多様体の量子コホモロジー環のプレポテンシャルが保型形式で与えられることの具体的検証をし、数学的意味付けを与える。特にアフィンリー環の分母公式等の表現論的意味付けとの関係を明らかにする。

研究成果

(1) カラビ・ヤウ多様体のグロモフ・ウィッテン不変量と BPS 不変量・Gopakumar-Vafa 予想

研究代表者の齋藤および分担者の細野、高橋は学術論文 A-2 において、カラビ・ヤウ 3-fold の一般種数におけるグロモフ・ウィッテン不変量 (一般には有理数) の母関数が適当な変数変換により整数不変量 (BPS 状態数) を用いて得られるという Gopakumar-Vafa 予想について研究した。特に、Calabi-Yau 3-fold の純次元 1 の連接層のモジュライ空間を用いて BPS 不変量の数学的な定義の候補を与え、特殊な場合ではあるが現在までの Gromov-Witten 不変量の具体的な計算と、その定義が整合的であることを確かめた。この研究は、齋藤・細野・高橋のそれ以前の有理楕円曲面の場合の正則アノーマリ方程式の研究、また細野の学術論文 A-43 の研究、吉岡・河合の学術論文 A-25 の研究と関係している。グロモフ・ウィッテン不変量のある母関数の構造と保形関数等の関係も示唆されている。この研究については、カナダ、英国、ドイツ、韓国等における多くの国際研究集会に齋藤、高橋、細野が招聘され講演を行った。この研究に関して、深谷・小野は A-38 において、シンプレクティック幾何学の立場から、種数 0 の場合ではあるが、グロモフ・ウィッテン不

変量の整数部分を取り出す研究を行った。ここでは、moduli 空間の各 stratum の法方向に概複素構造が入ることを下に法方向に有限群不変多項式を用いた摂動を用いることが鍵となる。周期的ハミルトン系については整数係数 Floer homology が定義され、Gromov-Witten 不変量についてはその整数部分を定義する。Faber や Pandharipande らの研究等世界的にも興味深い研究があるが、以前としてグロモフ・ウイッテン不変量については数学的に謎の多く、豊かな構造の見え隠れする分野である。今後は当面、我々の定義した BPS 不変量の計算や (特に種数 2 以上の場合)、Gopakumar-Vafa 予想の証明等を視野に入れて研究を続けたい。

(2) ホモロジカルミラー対称性と導来圏の幾何学

細野は、弦理論とカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性について、特に、Kontsevich によるホモロジー的ミラー対称性予想に関連した研究を行った。'94 年に Kontsevich は、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性について接続層の導来圏と、他方でラグランジアンサイクルから構成する Fukaya 圏の導来圏が圏同値になる (ホモロジー的ミラー対称性) という、一般的な枠組みを提唱した:

$$D(X) \cong DFuk(X^V, \beta) \quad (*)$$

ここで、 $D(X)$ はカラビ・ヤウ多様体 X の接続層の有界な複体から作る導来圏、右辺はミラーカラビ・ヤウ多様体 X^V とその上のシンプレクティック形式 β を下に定義される、Fukaya 圏の導来圏を表す。この枠組みは、Strominger-Yau-Zaslow による幾何学的なミラー多様体の構成法 (予想) を始め、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性に関する研究の 1 つの指針となっている。また、2 つの導来圏の対象には D プレインと呼ばれる弦理論的な解釈が存在し、弦理論においてその役割の解明が進んでいる。トーリックファノ多様体の中で、具体的に超曲面として実現されるカラビ・ヤウ多様体の周期写像は、一般に確定特異点型の微分方程式を満たすことが知られている。特に、ミラー対称性に関連する場合は、GKZ (Gelfand, Kapranov, Zelevinski) 超幾何微分方程式系という多変数微分方程式系が現れる。周期写像は、この微分方程式系の解空間に現れ、具体的に (integral な) モノドロミー性質によって特徴付けられる。このモノドロミー性質はカラビ・ヤウ多様体の変形族を考えると時の中間次元サイクル (ラグランジアンサイクル) のモノドロミーに由来するものである。ホモロジー的ミラー対称性 (*) の視点からみると、このモノドロミーの作用は、カテゴリ $DFuk(X^V, \beta)$ の自己同型 (auto-equivalence) と考えられる。シンプレクティック幾何学の枠組みで、この自己同型がどのようなものであるのか、いまのところよく知られていないのが現状であるが、(*) 式左辺では、接続層のつくる導来圏での Fourier-Mukai 変換と理解される。こうして、モノドロミー作用が Fourier-Mukai 変換として表されるという予想に至るのであるが、Kontsevich や Horja によって、幾つかの具体的な Fourier-Mukai 変換とモノドロミーとの対応が指摘されている。論文 A-44 (Adv. Theor. Math. Phys. 4(2000) 335-376) では、予想される対応を GKZ 超幾何級数の場合に調べることを行った。また、小木曾啓示氏、B.H. Lian 氏、S.-T. Yau 氏との共同研究 A-41, A-42 において、K3 曲面の場合のホモロジー論的ミラー対称性を調べた。導来圏を同値とする K3 曲面 (Fourier-Mukai partners) について新しい結果がえられ、さらに、非自明な Fourier-Mukai partner(s) が存在する場合のホモロジー論的ミラー対称性 (ミラーのモノドロミー性質) について、新しい現象が起こることが指摘された。

平坦なトーラス (アーベル多様体) 上の弦理論を表す共形場理論は、容易に解くことが出来る。そのような、共形場の理論の中で特に 2 次元トーラス上有理型共形場 ($c=2$ rational conformal field theory) の分類を行った。得られた結果は、対応する

アーベル多様体の幾何学，さらに導来圏の幾何学と結び付けて理解されると期待している。

深谷は、ホモロジカルミラー対称性を Floer ホモロジーと Lagrangian 部分多様体の立場から研究し、特に A_∞ カテゴリーのホモロジカル代数についての統一的な研究を行った。

(3) パンルベ方程式の初期値空間の代数幾何学・岡本・パンルベ対の変形理論

齋藤は、梅村との共同研究 A-6 において、パンルベ方程式の初期値空間とその Bäcklund 変換を、高次元代数幾何学の立場から見直し、Bäcklund 変換が双有理幾何学に現われるフロップであることを示した。この研究に続いて（論文は前後するが）、論文 A-2 において、パンルベ方程式の初期値空間を代数幾何学的に特徴付けた射影代数曲面とその上の反有理因子の対である岡本・パンルベ対の概念を導入して、射影代数曲面から反有理因子を除いた補修合に C^2 を含むものの分類を行った。この研究に引き続き、A-3 パンルベ方程式 C^2 とは限らない岡本・パンルベ対の分類を行い、川又・小平・スペンサーの変形理論を援用し微分方程式を変形理論の言葉で完全に書き直せる事をしめた。特に、局所コホモロジー完全系列から、パンルベ方程式の時間は局所コホモロジー群の言葉で記述でき、また加法的な岡本・パンルベ対に対して正の次元を持つことを示した（寺島の結果）。また変形が反標準因子を保ち、反標準因子を除いた部分に存在する正則シンプレクティック構造が変形で保たれることからパンルベ系がハミルトン系で書けることの内在的証明をえた。プレプリント A-1 においては、パンルベ方程式が Riccati 方程式に還元する事と岡本・パンルベ対の内点に (-2) 有理曲線を含む事が同値であることを示し、パンルベ方程式の Riccati 解の完全な分類を行った。特に、 $D_7^{(1)}$ 型の方程式は Riccati 解を持たない事を示した。

(3) Painlevé 方程式とその拡張についての Lie 理論的研究およびその離散化

研究分担者の野海正俊と山田泰彦は Painlevé 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) を見直し、アフィン Weyl 群・アフィン Lie 環の観点から Painlevé 型非線形方程式に新しい視座を与えた。さらに研究は進展し、パンルベ VI 型方程式の新しい Lax 形式系の発見 (A-7)、高野恭一との共同研究により、初期値空間の局所座標系とアフィンワイル群との関係を研究した (A-8)。

またアフィン Weyl 群が離散的に作用している離散可積分系においても様々な進展があり、たとえば A-9 においては $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ の affine Weyl 群の双有理表現を構成し、離散 Painlevé 方程式との関連を考察した。この表現は、トロピカル (= 全正值) な表現であり、超離散化により組合せ論的にも興味深い。野海はこれらの研究の成果に対して 2002 年北京での国際数学者会議で招待講演を行うという栄誉をえた (B-37, A-10)。

(4) ベクトル束のモジュライ空間とその対称性

研究分担者の吉岡 康太は、論文 A-26, 27, 28, 29 等において代数曲面のベクトル束のモジュライ空間を一貫して研究してきた。特に、安定ベクトル束が存在するための必要十分条件を求め、またモジュライ空間の連結性を示した。モジュライ空間がコンパクトである場合には、そのアルバネーゼ写像を決定し、またそのファイバーが既約超ケーラー多様体になることを示した。さらにその周期を向井格子を使って書き下し、また変形同値類が多様体の次元にしかよらないという著しい結果を示した。これによりモジュライ空間の位相構造に関する研究は階数が 1 の場合に帰着された。方法はフーリエ・向井変換と $K3$ 曲面の複素構造の変形理論を使ってなされたが、その過程

でフーリエ・向井変換と安定性の間の関係について研究した。Matsuki-Wentworthらにより導入された捻れた安定性の概念を定式化し直し、そのモジュライ空間を一般次元で構成した。捻れた安定性は??と関係が深く、これが私が捻れた安定性の概念を定式化し直した動機である。

2次元のモジュライ空間は特異点がない場合は向井によって $K3$ 曲面になることが知られている。特異点を持つ場合の研究は阿部により有理 2 重点をもつ $K3$ 曲面になることが観察されていたが、吉岡は大西宣明との共同研究 (A-30) で、このことの証明を完成し、また実際に A, D, E 型すべての特異点が現れることをしめた。この過程で、特異点に付随した単純 Lie 代数が自然に現れた。とくに基本ルートベクトルを使って例外集合が表現された。またワイル chamber が GIT 商に現れる chamber 構造と一致することがわかった。

(5) 不変式論の新たな展開

向井は、永田雅宜のヒルベルトの第 14 問題の反例の構成を簡易化し、それと射影曲面の 9 点ブローアップの空間の全座標環の非有限生成に帰着させた (A-31)。この多様体の普遍族は離散方程式系で $E_8^{(1)}$ 型アファインワイル群対称性をもつ、すなわち、双有理変換群としてアファインワイル群を表現でき、双有理変換のなす運動を記述するのが離散系方程式であるという坂井、野海、山田の知見があり、その面からもこの研究は興味深い。向井はさらに論文 A-32 において永田型作用と $T_{2,q,r}$ の Weyl 群に関する結果を一般の T 型 Dynkin 図形 $T_{p,q,r}$ に一般化した。これの不変式環がいつ有限生成になるかはまだ未解決である。

(6) 正標数または代数体上のカラビ・ヤウ多様体の数論幾何的研究

後藤は、論文 A-47 において、正標数の体上定義された $K3$ 曲面の Brauer 群の変形理論を研究した。正標数の体上定義された $K3$ 曲面は、Brauer 群の変形理論から生じる 1 次元形式群を持つ。この形式群の重要な不変量の 1 つに高さというものがあり、 $K3$ 曲面の場合、高さは 1 から 10 までの整数値をとる。これまで、5, 7, 8, 9 以外の高さをもつ $K3$ 曲面の具体例は知られていた。この論文では、weighted Delzante 型曲面を用いて、5, 8, 9 の高さを持つ $K3$ 曲面の例を構成した、また論文 A-48 において、Weighted Fermat 型曲面の変形に代表されるような $K3$ 曲面は、シンプレクティックな群作用を持ち、その群作用による商曲面が多くの特異点を持つ。そのような $K3$ 曲面に対して、Tate 予想の成立を示し、Artin-Shioda 予想の一部を証明した。さらに、通常は計算が難しい形式的 Brauer 群の高さや曲面上の有理点の個数についても、具体的な計算結果を得た。また齋藤は、Queen's 大学の由井との共同研究 (A-4) で Verrill 氏の構成した、 $K3$ 曲面のファイバー構造をもつ rigid Calabi-Yau 3-fold が、モジュラー曲線上の久賀・佐藤多様体と有理数体上双有理であることをしめし、Calabi-Yau 3-fold の 3 次の l -進コホモロジーのガロア表現が、重さ 4 のカスプ形式から定まるガロア表現と同形であることをしめし、modularity 予想 (Serre) を検証した。

(7) その他

研究代表者および、分担者は 2000 年から 2002 年の間に、多くの国際研究集会およびスクールを組織し、また国際研究集会に招聘されて研究発表を行った。詳しくは、D:研究代表者・分担者が関わったプロジェクト・研究集会を参照の事。

(8) まとめ

上記の様にこの 3 年間において、研究代表者および研究分担者は申請書の研究目的に沿った研究を行い、多くの成果をえた。