1. 普遍指標 = Schur多項式の拡張 (小池)

一般線形群の有理表現の既約指標.

可積分系

- パンルベ方程式 P_V, P_{VI} の代数関数解 (増田, 太田, 梶原)
- $A^{(1)}_{2n+1}$ 型 高階 Painlevé eq 〃 (増田)
- ガルニエ系 〃

数理物理

- ある模型の形状因子に現れる (竹山)

定義（小池）

$[\lambda,\mu]=[\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_\ell,\ \mu_1\geq\cdots\geq\mu_{\ell'}]$: Young図形の組.

普遍指標（universal character, 以下 u.c.）:

$$S_{[\lambda,\mu]}(x,y)=\det\begin{bmatrix} q_{\mu_{\boxed{\ell'-i+1}}+i-j}(y), & 1\leq i\leq\ell' \\ p_{\lambda_{\boxed{i-\ell'}}-i+j}(x), & \ell'+1\leq i\leq\ell+\ell' \end{bmatrix}_{1\leq i,j\leq\ell+\ell'}$$

↑μの添字

$(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,y_1,y_2,\cdots)$

但し，$\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)k^n=e^{\xi(x,k)}$, $\xi(x,k)=\sum_{n=1}^{\infty}x_nk^n$. $q_n(y):=p_n(y)$.

↖基本Schur関数.

例

- $\mu=\phi$ $\qquad S_{[\lambda,\phi]}(x,y) = S_\lambda(x)$: Schur 多項式.
- $\lambda=(1),\ \mu=(1)$ $\qquad \begin{vmatrix} q_1 & q_0 \\ \hline p_0 & p_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1y_1 - 1$. $\qquad$ 0次
- $\lambda=(2,1),\ \mu=(1)$ $\qquad \begin{vmatrix} q_1 & q_0 & q_{-1} \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \\ p_{-1} & p_0 & p_1 \end{vmatrix} = y_1\left(\dfrac{x_1^3}{3} - x_3\right) - x_2$. $\qquad$ 2次

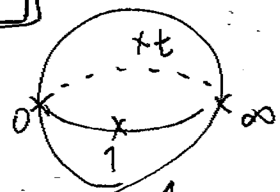
注

- $\{u, c\}$ は $\mathbb{C}[x,y]$ の基底である.
- $\deg x_n = n$, $\deg y_n = -n$ とすると, $S_{[\lambda,\mu]}(x,y)$ は $|\lambda|-|\mu|$ 次の重み付き同次式.

2. Painlevé 方程式 と Garnier 系 について.

2階代数的ODE
動く特異点は極のみ $\xrightarrow{\text{分類}}$ (P. Painlevé)

$$\left\{\begin{array}{l} P_{I} : y'' = 6y^2 + t \\ \vdots \\ \boxed{P_{VI}} \end{array}\right.$$



$\mathbb{P}^1$

2階線形ODEの
モノドロミー保存変形 $\nearrow$ (R. Fuchs) (Garnier)

$\uparrow$

Garnier系とはこの視点からの拡張.

$$\begin{array}{llllll}
 & & & (2,2)\ \mathrm{III} & & \\
\text{4の分割} & (1,1,1,1) & - \ (1,1,2) & - \ (1,3) & - \ (4) & \mathrm{I} \\
 & P_{\mathrm{VI}} & \mathrm{V} & \mathrm{IV} & \mathrm{II} & \\
 & & & (1,2,2) & (2,3) & \\
\text{5の分割} & \overset{0\ 1\ \infty\ t_1\ t_2}{(1,1,1,1,1)} & - \ (1,1,1,2) & - \ (1,1,3) & (1,4) & - \ (5) \\
 & \vdots & & & & \\
\text{N+3の分割} & (\overbrace{1,\cdots,1}^{N+3}) & - \ \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

分割 (♯) に対応する Painlevé, Garnier系を $G(♯)$ と書く.

<u>予想</u>　$G(1,♯) \supset G(♯)$　特殊解として含む.

((♯)=(1,…,1), (1,1,2), (1,3), (4), (5) 少くとも正しい)

以下, $\mathcal{H}_N := G(\underbrace{1,\cdots,1}_{N+3})$ を扱う.

$\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \theta_1, \cdots, \theta_N) \in \mathbb{C}^{N+3}$ パラメタ.

$\mathcal{H}_N(\kappa)$:

$$\frac{dq_i}{ds_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_i}, \quad 1 \le i, j \le N$$

$$H_i = H_i(q, p, s, \kappa) \in \mathbb{C}(s)[q, p, \kappa]$$ 多項式 Hamiltonian
(木村・岡本)

- τ 函数の存在. $d \log \tau(s) = \sum_{i=1}^{N} H_i ds_i$.

• 双有理変換の対称性　ある ℓ　$\langle \ell \rangle = \mathbb{Z}$

$$\mathrm{aff}(\mathbb{C}^{N+3}) \supset G \supset \mathbb{Z}^{N+3} \ni \ell$$

パラメタ空間　　　　　　平行移動部分群.

この作用が双有理正準変換に持ち上がる.

注　G の生成元

- κ の成分の置換 $\simeq \mathfrak{S}_{N+3}$
- $\kappa_\infty \mapsto -\kappa_\infty$
- $(\kappa_0, \kappa_1) \longmapsto (\kappa_0+1, \kappa_1+1)$

$\bar{G}$ で $\mathcal{H}_N$ の対称性がつくされてるとは限らない.

タウ函数の列.

$\tau_n := \tau(\ell^n(\kappa))$.　　$n \in \mathbb{Z}$

Thm　X, Y : 可換なベクトル場

$$XY \log \tau_n = c_n \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

(戸田方程式)

$(c_n \neq 0$:　定数$)$

//

2003年05月13日　16時48分

8

Gの適当な元の固定点 = 代数関数解.

Th'm (i) $\kappa_0=\kappa_1=1/2$ のとき, $(q_i, p_i)=\left(\dfrac{\theta_i\sqrt{s_i}}{\kappa_\infty}, \dfrac{\kappa_\infty}{2\sqrt{s_i}}\right)$
は $\mathcal{H}_N$ の解.

(ii) $\kappa\in\mathbb{C}^{N+3}$ の ある2成分が 半整数
$\Rightarrow$ $\mathcal{H}_N$ は 代数関数解 をもつ.

具体的に $S_{[\lambda,\mu]}(x,y)$ で書ける.

対応する τ-函数 が, u.c. になる.

適当な規格化, $t_i=\sqrt{s_i}$

$m,n\in\mathbb{Z}$

$T_{m,n}(t)$: 整係数の多項式

$\begin{cases}\kappa_0 = m+n+1/2\\ \kappa_1 = m-n+1/2\end{cases}$ の τ函数

Th'm
$$T_{m,n}(t) = N_{m,n}\, S_{[\lambda,\mu]}(x,y).$$
($N_{m,n}$: 規格化因子)

ここで $k=1,2,\cdots$
$$\begin{cases} x_k = \dfrac{\kappa_\infty+\sum_i \theta_i(-t_i)^k}{k},\\[2ex] y_k = \dfrac{\kappa_\infty+\sum_i \theta_i(-t_i)^{-k}}{k}\end{cases}$$

λ,μ : 2-core Young 図形

//

注 $N=1$ P_{VI} (増田)

注

有理函数解 ～ $S_\lambda(x)$

シューア多項式

$\lambda =$  長方形

$\alpha = 0$ ： ロリチェラ HG.

3. 普遍指標とKP階層の拡張

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Schur 多項式 } S_\lambda(x) & \overset{\text{解}}{\dashrightarrow} & \text{KP 階層} \\
\cap & & \cap \\
\text{普遍指標 } S_{[\lambda,\mu]}(x,y) & \dashrightarrow & \boxed{\ ?\ }
\end{array}
$$

ここを構成する.

2003年05月13日　17時02分

L10

Th'm $S_{[\lambda,\mu]}(x,y) = X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_\ell} Y_{\mu_1}\cdots Y_{\mu_{\ell'}}\cdot 1$

但し.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n k^n = e^{\xi(x-\tilde{\partial}_y,\, k)} e^{-\xi(\tilde{\partial}_x,\, k^{-1})}$$

頂点作用素 $\tilde{\partial}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}, \cdots\right)$

Y_n : X_n において $x \Leftrightarrow y$ 入れかえたもの.

X_n^*, Y_n^* : X_n, Y_n において $(x, y) = (-x, -y)$ としたものとする.

・可積分系

$\tau = \tau(x,y)$

$$\boxed{\sum_{n+m=-1} X_n\tau \otimes X_m^*\tau = \sum_{n+m=-1} Y_n\tau\otimes Y_m^*\tau = 0} \quad \cdots (*)$$

(*) は. $\underbrace{\text{可算}\infty\text{個の無限階微分eqの連立系}}_{=\ \text{UC階層}}$ とよぶ.

UC 階層の解

- $S_{(\lambda,\mu)}(x,y)$ は解.
- soliton 解あり.
- $gl_\infty \oplus gl_\infty$ 対称性.
- ボゾン＝フェルミオン対応 → OK
- 解空間 ＝ SGM × SGM

KPについての佐藤理論の自然な拡張.

Th'm

$\tau(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$: UC階層の解

$\Leftrightarrow$ $^\exists \tau_1(x), \tau_2(x) \in \mathbb{C}[x]$: KP の解 s.t.

$$\tau(x,y) = \left(\tau_1(x-\tilde{\partial}_y)\tau_2(y-\tilde{\partial}_x)\cdot 1\right)$$

注

$$= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial y_n}\right)\tau_1(x)\tau_2(y)$$

とも書ける.

特に

$$S_{[\lambda,\mu]}(x,y) = S_\lambda(x-\tilde{\partial}_y)S_\mu(y-\tilde{\partial}_x)\cdot 1$$