G_2型楕円超幾何積分が満たすq差分方程式について

伊藤 雅彦（琉球大理）

野海正俊（神戸大理）との共同研究

2020年2月21日（金）　研究集会「q, q & q」@神戸大

底$q \in \mathbb{C}^*$ $(|q| < 1)$に関して以下の記号を使う.

$$(u;q)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i u), \quad (u_1,\ldots,u_n;q)_\infty := (u_1;q)_\infty \cdots (u_n;q)_\infty$$

$$\theta(u;q) := (u;q)_\infty (qu^{-1};q)_\infty$$

背景　ルート系に付随する q-ベータ積分

以下, $|q| < 1$ なる $q \in \mathbb{C}^*$ を固定する.

Askey-Wilson 積分 (BC_1 型 q-ベータ積分)

$a_k \in \mathbb{C}^*$ $(1 \le k \le 4)$ は $|a_k| < 1$ を満たすとする. このとき,

$$\frac{(q;q)_\infty}{2\,(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{T}} \frac{(x^2, x^{-2};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{4}(a_k x, a_k x^{-1};q)_\infty}\frac{dx}{x} = \frac{(a_1a_2a_3a_4;q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_j;q)_\infty}.$$

ただし $\mathbb{T}$ は単位円周　$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$　を表す.

1980 年代から 1990 年代にかけて R. A. Gustafson は，Macdonald 定数項恒等式の研究との関連で，Weyl 群不変な q-級数や q-積分に関する (Macdonald 定数項恒等式とは異なる) 先駆的な一連の結果を得ている. Weyl 群が古典型 (A_n 型, BC_n 型など) の場合の Gustafson の公式は，その $q \to 1$ の極限として，Dixon の公式 (1905) (Dirichlet 積分のガンマ函数による積表示の拡張) を含んでいる. この意味で，Gustafson の公式は, ベータ函数型多重積分のガンマ函数積表示の q-類似と言える.

一方, 1990 年から 1994 年にかけて, Weyl 群が例外型 G_2 型の場合に関しても Gustafson は次の命題に示される q-積分の公式を得ている.

G_2型Gustafson q-ベータ積分

命題. (Gustafson [1990,1994])

$a_k \in \mathbb{C}^* \ (1 \le k \le 4)$ は $|a_k| < 1$ を満たすとする．このとき以下の複素2重積分に関する無限積表示が成立する:

$$\frac{(q;q)_\infty^2}{12\,(2\pi\sqrt{-1})^2}\iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\prod_{1\le i<j\le 3}(x_ix_j, x_i^{-1}x_j, x_ix_j^{-1}, x_i^{-1}x_j^{-1};q)_\infty}{\prod_{i=1}^{3}\prod_{k=1}^{4}(a_kx_i, a_kx_i^{-1};q)_\infty}\frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2}$$

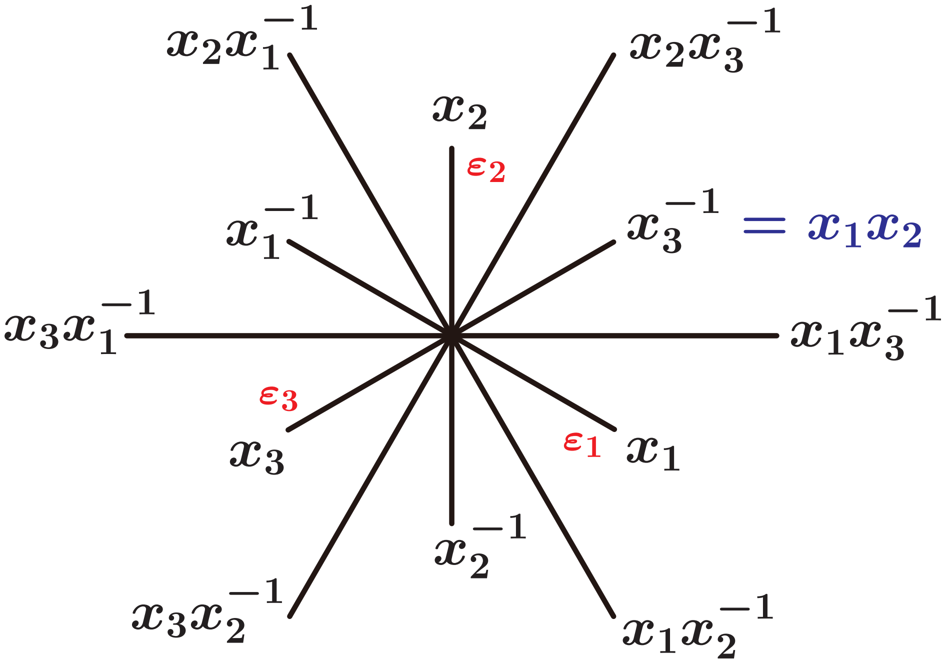
$$= \frac{(a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2;q)_\infty}{(a_1a_2a_3a_4;q)_\infty}\prod_{i=1}^{4}\frac{(a_i;q)_\infty}{(a_i^2;q)_\infty}\prod_{1\le i<j\le 4}\frac{1}{(a_ia_j;q)_\infty}\prod_{1\le i<j<k\le 4}\frac{1}{(a_ia_ja_k;q)_\infty}.$$

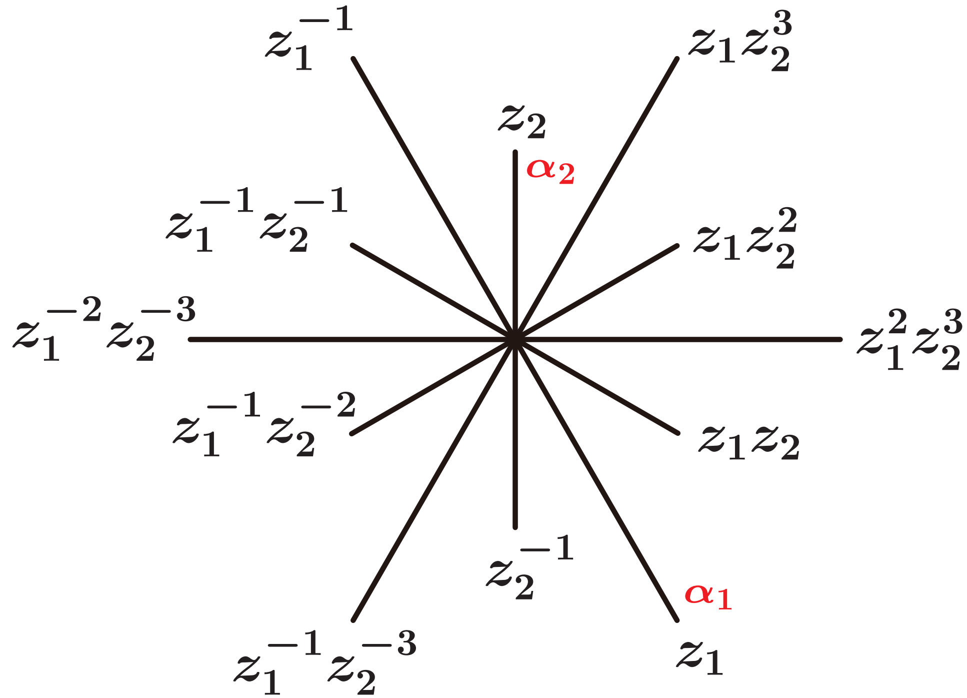
ただし $x_3 = x_1^{-1}x_2^{-1}$ で, 積分路は単位円周の直積を表す：

$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1,x_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid |x_i| = 1 \ (i=1,2)\}.$$

註. 左辺の被積分関数が, 積分変数 x_i に関する G_2 型Weyl群の作用に対して不変になっている．この被積分関数の変数 x_i は, G_2 型ルート系の座標の取り方によっていろいろな書き方ができる.

G_2型ルート系 $x_i = e^{\varepsilon_i}\ (i=1,2,3),\ z_i = e^{\alpha_i}\ (i=1,2)$





左辺の積分は

$$\iint_{\mathbb{T}^2} \prod_{i=1}^{3} \frac{(x_i, x_i^{-1}; q)_\infty}{\prod_{k=1}^4 (a_k x_i, a_k x_i^{-1}; q)_\infty} \prod_{1\le j<k\le 3} (x_j x_k^{-1}, x_k x_j^{-1}; q)_\infty \frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2},$$

あるいは

$$\iint_{\mathbb{T}^2} \frac{(z_2, z_1z_2, z_1z_2^2, z_1, z_1z_2^3, z_1^2z_2^3; q)_\infty}{\prod_{k=1}^4 (a_k z_2, a_k z_1 z_2, a_k z_1 z_2^2; q)_\infty}$$
$$\times \frac{(z_2^{-1}, z_1^{-1}z_2^{-1}, z_1^{-1}z_2^{-2}, z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2^{-3}, z_1^{-2}z_2^{-3}; q)_\infty}{\prod_{k=1}^4 (a_k z_2^{-1}, a_k z_1^{-1} z_2^{-1}, a_k z_1^{-1} z_2^{-2}; q)_\infty} \frac{dz_1}{z_1}\frac{dz_2}{z_2}.$$

楕円の場合

$|p| < 1, |q| < 1$ とする.

Ruijsenaars 楕円ガンマ函数 $\Gamma(u;p,q)$ $(u \in \mathbb{C}^*)$ を以下で定義する.

$$\Gamma(u;p,q) = \frac{(pqu^{-1};p,q)_\infty}{(u;p,q)_\infty}, \quad (u;p,q)_\infty = \prod_{\mu,\nu=0}^{\infty}(1 - p^\mu q^\nu u).$$

記号 $\Gamma(u_1,\ldots,u_m;p,q) = \Gamma(u_1;p,q)\cdots\Gamma(u_m;p,q)$ を用いる. $\Gamma(u;p,q)$ の性質：

$$\Gamma(qu;p,q) = \theta(u;p)\Gamma(u;p,q), \quad \Gamma(pq/u;p,q) = \frac{1}{\Gamma(u;p,q)}.$$

BC_1 型楕円ベータ積分 (Spiridonov, et al.) $|a_k| < 1$ $(k = 1,\ldots,6)$ とする.

平衡条件 $a_1 \cdots a_6 = pq$ の下で

$$\frac{(p;p)_\infty(q;q)_\infty}{2\,(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{k=1}^{6}\Gamma(a_k x, a_k x^{-1};p,q)}{\Gamma(x^2,x^{-2};p,q)}\frac{dx}{x} = \prod_{1\le i<j\le 6}\Gamma(a_i a_j;p,q).$$

註. $a_6 \to pa_6$ とした後, $p \to 0$, $a_5 \to 0$ の極限で Askey-Wilson 積分が得られる.

G_2型楕円Gustafson積分

定理. [Ito–Noumi, arXiv:1902.04858] $|a_k| < 1\ (1 \le k \le 5)$ とする. $x_1x_2x_3 = 1$ とし, 平衡条件

$$(a_1a_2a_3a_4a_5)^2 = pq$$

の下で以下が成立する:

$$\frac{(p;p)_\infty^2(q;q)_\infty^2}{12\,(2\pi\sqrt{-1})^2}\iint_{\mathbb{T}^2}\frac{\prod_{i=1}^3\prod_{k=1}^5\Gamma(a_kx_i,a_kx_i^{-1};p,q)}{\prod_{1\le i<j\le 3}\Gamma(x_iz_j,x_i^{-1}x_j,x_ix_j^{-1},x_i^{-1}x_j^{-1};p,q)}\frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2}$$

$$=\prod_{i=1}^5\frac{\Gamma(a_i^2;p,q)}{\Gamma(a_i;p,q)}\prod_{1\le i<j\le 5}\Gamma(a_ia_j;p,q)\prod_{1\le i<j<k\le 5}\Gamma(a_ia_ja_k;p,q)\prod_{1\le i<j<k<l\le 5}\Gamma(a_ia_ja_ka_l;p,q).$$

註. $a_1a_2a_3a_4a_5 = \sqrt{pq}$ のとき, $\Gamma(u;p,q) = 1/\Gamma(pq/u;p,q)$ を使うと, 右辺は

$$\prod_{i=1}^5\frac{\Gamma(a_i^2;p,q)}{\Gamma(a_i;p,q)\Gamma(a_i\sqrt{pq};p,q)}\prod_{1\le i<j\le 5}\frac{\Gamma(a_ia_j;p,q)}{\Gamma(a_ia_j\sqrt{pq};p,q)}$$

と変形できる [Spiridonov-Vartanov, Superconformal indices for $\mathcal{N} = 1$ theories with multiple duals, Nuclear Phys. B 824 (2010), p. 213, 予想(36)]. さらに, $a_5 \to a_5\sqrt{p}$ とシフトした後で, $p \to 0$ の極限をとれば, 直ちにGustafsonの q-積分の公式が得られる.

証明の概要

(1) q-差分方程式 定理の両辺がそれぞれ共通の（パラメータに関する p または q シフトの）差分方程式(2項間)を満たすことを示す．そのことで，左辺は右辺の因子に定数倍の違いを除き一致することがわかる．定理の右辺は楕円ガンマ函数の積だから，それが満たす差分方程式は直ちに得られる．差分方程式はテータ函数の関係式として与えられる．

条件 $(a_1a_2a_3a_4a_5)^2 = pq$ の下で，

$$I(qa_1, a_2, a_3, a_4, q^{-1}a_5) = I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\frac{\theta(a_1^2;p)\theta(qa_1^2;p)}{\theta(q^{-2}a_5^2;p)\theta(q^{-1}a_5^2;p)}\times$$

$$\times\frac{\theta(q^{-1}a_5;p)\theta(a_1a_2a_3a_4;p)}{\theta(a_1;p)\theta(q^{-1}a_2a_3a_4a_5;p)}\prod_{i=2}^{4}\frac{\theta(a_1a_i;p)}{\theta(q^{-1}a_5a_i;p)}\prod_{2\le i<j\le 4}\frac{\theta(a_1a_ia_j;p)}{\theta(q^{-1}a_5a_ia_j;p)}.$$

よって，定理の左辺の積分が満たす差分方程式も上記と一致すること，を示すことが問題である．それには q-差分 de Rham の方法（Stokes の公式の q-類似）を使った．

(2) 特殊値 パラメータに依らない定数部分の値を決定するために両辺の $a_1a_2 = 1$ での値をそれぞれ求め，比較する.（両辺を a_1 の函数として見たとき，$1/a_2$ は極になっているので，実際は $a_1 = 1/a_2$ における留数を計算する.）左辺の留数を計算する際，累次積分を計算して2重積分を1重積分に帰着させるが，その1重積分は最終的に BC_1 型楕円ベータ積分の公式と同じものになる． 今回は時間がないので説明しない.

q-差分 de Rham の方法 (Stokes の公式の q-類似)

$z=(z_1,z_2)\in(\mathbb{C}^*)^2$ とし函数 $\Phi(z)$ を以下のように定義する：

$$\Phi(z)=\Phi_+(z)\Phi_+(z^{-1}).$$

ただし $z^{-1}=(z_1^{-1},z_2^{-1})$ で,

$$\Phi_+(z)=\frac{\prod_{k=1}^5\Gamma(a_kz_2,a_kz_1z_2,a_kz_1z_2^2;p,q)}{\Gamma(z_2,z_1z_2,z_1z_2^2,z_1,z_1z_2^3,z_1^2z_2^3;p,q)}$$

とする．ここで

$$\frac{T_{q,z_1}\Phi(z)}{\Phi(z)}=-\frac{f_+(z)}{T_{q,z_1}f_-(z)}.$$

ただし

$$f_+(z)=(z_1^2z_2^3)^{-\frac12}\frac{\prod_{k=1}^5\theta(a_kz_1z_2,a_kz_1z_2^2;p)}{\theta(z_1z_2,z_1z_2^2,z_1,z_1z_2^3,z_1^2z_2^3;p)},\quad f_-(z)=f_+(z^{-1}).$$

q 差分作用素 ∇_{sym} $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の函数 $\varphi(z)$ に対して作用素 ∇ を次で定義する．

$$\nabla\varphi(z)=f_-(z)T_{q,z_1}^{-\frac12}\varphi(z)+f_+(z)T_{q,z_1}^{\frac12}\varphi(z).$$

さらに $$\nabla_{\mathrm{sym}}\varphi(z)=\sum_{w\in W_{G_2}}w.(\nabla\varphi)(z)$$ ←実質 24 項の和 と定義する．

$\varphi(z)$ を $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の任意の有理型函数で, $\varphi(z)\Phi(z)$ が $\mathbb{T}^2$ の近傍で正則とするとき, 記号

$$\langle\varphi(z)\rangle = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\iint_{\mathbb{T}^2}\varphi(z)\Phi(z)\frac{dz_1}{z_1}\frac{dz_2}{z_2}$$

を定義する. このとき $\langle 1\rangle$ が求めたい G_2 型 Gustafson 楕円ベータ積分である.

$\mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^2)$ を $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の正則函数からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする.

$|a_i| < 1\ (i = 1, \ldots, 5)$ のとき,

$$\boxed{\varphi(z) \in z_2^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^2) \quad\Longrightarrow\quad \langle\nabla\varphi(z)\rangle = 0, \quad \text{さらに} \quad \langle\nabla_{\text{sym}}\varphi(z)\rangle = 0}$$

が Cauchy の積分定理から確かめられる. この式を **q-Stokes の公式**と呼ぶことにする.

記号 $e(u, v; p) := u^{-1}\theta(uv; p)\theta(u/v; p)$ とする.

性質 : $e(u, v; p) = -e(v, u; p), \quad e(pu, v; p) = e(u, v; p)(pu^2)^{-1}.$

$i = 1, \ldots, 5$ に対し

$$T_{q,a_i}\Phi(z) = a_i^3F_i(z)\Phi(z), \quad F_i(z) = e(a_i, z_2; p)e(a_i, z_1z_2; p)e(a_i, z_1z_2^2; p)$$

なので, 積分 $I(a) = I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \langle 1\rangle$ は a_i の q シフトに対して

$$T_{q,a_i}I(a) = a_i^3\langle F_i(z)\rangle \quad (i = 1, \ldots, 5).$$

補題. $|a_i|<1\ (i=1,\dots,5)$ とする．平衡条件 $(a_1a_2a_3a_4a_5)^2q=p$ の下で，

$$\langle F_1(z)\rangle=\langle F_2(z)\rangle\frac{a_2^3\theta(a_1^2;p)\theta(qa_1^2;p)}{a_1^3\theta(a_2^2;p)\theta(qa_2^2;p)}\frac{\theta(a_2;p)\theta(a_1a_3a_4a_5;p)}{\theta(a_1;p)\theta(a_2a_3a_4a_5;p)}\times$$
$$\times\prod_{i=3}^{5}\frac{\theta(a_1a_i;p)}{\theta(a_2a_i;p)}\prod_{3\le i<j\le 5}\frac{\theta(a_1a_ia_j;p)}{\theta(a_2a_ia_j;p)},$$

言い換えると

$$I(qa_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=I(a_1,qa_2,a_3,a_4,a_5)\frac{\theta(a_1^2;p)\theta(qa_1^2;p)}{\theta(a_2^2;p)\theta(qa_2^2;p)}\times$$
$$\times\frac{\theta(a_2;p)\theta(a_1a_3a_4a_5;p)}{\theta(a_1;p)\theta(a_2a_3a_4a_5;p)}\prod_{i=3}^{5}\frac{\theta(a_1a_i;p)}{\theta(a_2a_i;p)}\prod_{3\le i<j\le 5}\frac{\theta(a_1a_ia_j;p)}{\theta(a_2a_ia_j;p)}.$$

註. パラメータの対称性より

$$I(qa_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=I(a_1,a_2,a_3,a_4,qa_5)\frac{\theta(a_1^2;p)\theta(qa_1^2;p)}{\theta(a_5^2;p)\theta(qa_5^2;p)}\times$$
$$\times\frac{\theta(a_5;p)\theta(a_1a_2a_3a_4;p)}{\theta(a_1;p)\theta(a_2a_3a_4a_5;p)}\prod_{i=2}^{4}\frac{\theta(a_1a_i;p)}{\theta(a_5a_i;p)}\prod_{2\le i<j\le 4}\frac{\theta(a_1a_ia_j;p)}{\theta(a_5a_ia_j;p)}.$$

この式で $a_6\to q^{-1}a_6$ の置き換えをすれば，最初に紹介した q 差分方程式に一致する．

以下, 前ページの補題の証明を説明するために補間函数の空間を導入する.

補間函数の空間 $\mathcal{H}_m^{(p)}$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}_m^{(p)}} := \left\{ f(z) \in \mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^2)^{W_{G_2}} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_{p,z_1} f(z) = f(z)(p z_1^2 z_2^3)^{-m}, \\ T_{p,z_2} f(z) = f(z)(p^3 z_1^3 z_2^6)^{-m} \end{array} \right\}$$

とすれば

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_m^{(p)} = \begin{cases} n(n+1) & (m = 2n-1 \text{ のとき}) \\ (n+1)^2 & (m = 2n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

特に $m=2$ の場合. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2^{(p)} = 4.$

$$F_i(z) = e(a_i, z_2; p) e(a_i, z_1 z_2; p) e(a_i, z_1 z_2^2; p) \in \mathcal{H}_2^{(p)}$$

がわかり

$$\mathcal{H}_2^{(p)} = \mathbb{C}F_1(z) \oplus \mathbb{C}F_2(z) \oplus \mathbb{C}F_3(z) \oplus \mathbb{C}F_4(z).$$

ここで $\{F_1(z), F_2(z), F_3(z), F_4(z)\}$ は $\mathcal{H}_2^{(p)}$ の一つの基底となるが, ∇_{sym} の計算にはよい基底ではない. ここで $F_3(z)$, $F_4(z)$ をうまく取り換える. うまい参照点を決め, そこで補間条件に合うような基底 $\{F_1(z), F_2(z), G(z), H(z)\}$ を作ることができる. まず参照点の決め方を述べる.

参照点と補間基底

$(\mathbb{C}^*)^2$ の点 p_{ij} p^*_{ij} を $(1 \le i < j \le 5)$ をそれぞれ以下のようにとる.

$$\mathrm{p}_{ij} = (\boldsymbol{a_i}/\boldsymbol{a_j}, \boldsymbol{a_j}) \quad \Big(\text{つまり}\ \boldsymbol{z} = \mathrm{p}_{ij}\ \text{のとき}\ \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{a_j},\ \boldsymbol{z_1 z_2} = \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{z_1 z_2^2} = \boldsymbol{a_i a_j}\Big),$$

$$\mathrm{p}^*_{ij} = (\boldsymbol{a_i^2}/\boldsymbol{a_j}, \boldsymbol{a_j}/\boldsymbol{a_i}) \quad \Big(\text{つまり}\ \boldsymbol{z} = \mathrm{p}^*_{ij}\ \text{のとき}\ \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{a_j}/\boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{z_1 z_2} = \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{z_1 z_2^2} = \boldsymbol{a_j}\Big).$$

ここで $\{\mathrm{p}_{23}, \mathrm{p}_{13}, \mathrm{p}_{12}, \mathrm{p}^*_{12}\}$ を参照点にするような $\boldsymbol{\mathcal{H}_2^{(p)}}$ の補間基底が選べる. つまり

	p_{23}	p_{13}	p_{12}	p^*_{12}
$F_1(z)$	$*$	0	0	0
$F_2(z)$	0	$*$	0	0
$G(z)$	0	0	$*$	0
$H(z)$	0	0	0	$*$

となるような $\boldsymbol{G(z)}$, $\boldsymbol{H(z)} \in \boldsymbol{\mathcal{H}_2^{(p)}}$ を選ぶことができる. その構成法は略.

補題. 平衡条件 $(a_1a_2a_3a_4a_5)q^{\frac{1}{2}} = \epsilon\, p^{\frac{1}{2}}$ $(\epsilon \in \{-1, 1\})$ の下で，

$$\phi(z) = z_2^{-\frac{1}{2}}\theta(-z_2, -\epsilon\, p^{\frac{1}{2}}z_1z_2, -\epsilon\, p^{\frac{1}{2}}z_1z_2^2; p)e(a_1, z_2)e(a_2, z_2),$$

$$\phi'(z) = z_1^{-1}z_2^{-\frac{3}{2}}\theta(-\epsilon\, p^{\frac{1}{2}}z_2, -z_1z_2, -z_1z_2^2; p)e(a_1, z_2)e(a_2, z_2)$$

とすれば，$\nabla_{\mathrm{sym}}\,\phi(z), \nabla_{\mathrm{sym}}\,\phi'(z) \in \mathcal{H}_2^{(p)}$ となる．つまり，

$$\nabla_{\mathrm{sym}}\,\phi(z) = c_1F_1(z) + c_2F_2(z) + c_3G(z) + c_4H(z),$$

$$\nabla_{\mathrm{sym}}\,\phi'(z) = c_1'F_1(z) + c_2'F_2(z) + c_3'G(z) + c_4'H(z)$$

と展開できる．ここで係数はそれぞれ $\quad c_1 = \dfrac{4f_+(\mathrm{p}_{23})(T_{q,z_1}^{\frac{1}{2}}\phi)(\mathrm{p}_{23})}{F_1(\mathrm{p}_{23})},$

$$c_2 = \frac{4f_+(\mathrm{p}_{13})(T_{q,z_1}^{\frac{1}{2}}\phi)(\mathrm{p}_{13})}{F_2(\mathrm{p}_{13})}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{4f_+(\mathrm{p}_{12}^*)(T_{q,z_1}^{\frac{1}{2}}\phi)(\mathrm{p}_{12}^*)}{H(\mathrm{p}_{12}^*)}.$$

c_i' $(i = 1, \ldots, 4)$ も同様．特に，係数はすべて因数分解していて具体的に書ける．

$\boldsymbol{q}$-Stokesの公式 $\langle \nabla_{\rm sym}\, \varphi(z)\rangle = 0$ を使って直ちに

補題. 平衡条件 $(a_1a_2a_3a_4a_5)^2q = p$ の下で

$$c_1\langle F_1(z)\rangle + c_2\langle F_2(z)\rangle + c_4\langle H(z)\rangle = 0,$$

$$c_1'\langle F_1(z)\rangle + c_2'\langle F_2(z)\rangle + c_4'\langle H(z)\rangle = 0$$

が成立. 係数は前ページで与えられたもの.

これらの連立方程式から $\langle H(z)\rangle$ を消去して $\langle F_1(z)\rangle$ と $\langle F_2(z)\rangle$ の関係式が得られる. 以上より q 差分方程式が求められた.

パラメータの数を5個から6個にすると，必要な状況に応じて $\boldsymbol{\mathcal{H}_3^{(p)}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}_4^{(p)}}$ の補間基底が必要になる.

$\mathcal{H}_4^{(p)}$ の参照点と補間基底 $\quad \mathbf{dim}_{\mathbb{C}}\, \boldsymbol{\mathcal{H}_4^{(p)}} = \mathbf{9}$

$$\boldsymbol{F_{ij}(z) := F_i(z)F_j(z) \in \mathcal{H}_4^{(p)}}$$

	p_{34}	p_{24}	p_{14}	p_{23}	p_{13}	p_{12}	p_{23}^*	p_{13}^*	p_{12}^*
F_{12}	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0
F_{13}	0	$*$	0	0	0	0	0	0	0
F_{23}	0	0	$*$	0	0	0	0	0	0
G_1	0	0	0	$*$	0	0	0	0	0
G_2	0	0	0	0	$*$	0	0	0	0
G_3	0	0	0	0	0	$*$	0	0	0
H_1	0	0	0	0	0	0	$*$	0	0
H_2	0	0	0	0	0	0	0	$*$	0
H_3	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$

となるような $\boldsymbol{\mathcal{H}_4^{(p)}}$ の補間基底がとれる. $\boldsymbol{G_i(z)}$ と $\boldsymbol{H_i(z)}$ の構成法は略.

命題. 平衡条件 $\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_6 q = -p}$ の下で

$$\boldsymbol{A\langle F_{23}(z)\rangle + B\langle F_{13}(z)\rangle + C\langle F_{12}(z)\rangle = 0}.$$

ここで、

$$A = a_1 \frac{\theta(a_1^2, q a_1^2; p)}{\theta(a_1; p)} \frac{\theta(a_1 a_2 q, a_1 a_3 q; p)}{\theta(a_1/a_2, -a_1/a_2, a_1/a_3, -a_1/a_3; p)} \prod_{k=4}^{6} \theta(a_1 a_k; p) \prod_{4 \le i < j \le 6} \theta(a_1 a_i a_j; p),$$

$$B = a_2 \frac{\theta(a_2^2, q a_2^2; p)}{\theta(a_2; p)} \frac{\theta(a_1 a_2 q, a_2 a_3 q; p)}{\theta(a_2/a_1, -a_2/a_1, a_2/a_3, -a_2/a_3; p)} \prod_{k=4}^{6} \theta(a_2 a_k; p) \prod_{4 \le i < j \le 6} \theta(a_2 a_i a_j; p),$$

$$C = a_3 \frac{\theta(a_3^2, q a_3^2; p)}{\theta(a_3; p)} \frac{\theta(a_1 a_3 q, a_2 a_3 q; p)}{\theta(a_3/a_1, -a_3/a_1, a_3/a_2, -a_3/a_2; p)} \prod_{k=4}^{6} \theta(a_3 a_k; p) \prod_{4 \le i < j \le 6} \theta(a_3 a_i a_j; p).$$

G_2型がBC_n型と比べて難しい点がいくつかある．パラメータが6個のときにq差分方程式を求める際に以下の恒等式を使う．

$$
\begin{aligned}
&ax_1x_3\theta(-p^{\frac{1}{2}}x_1;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}x_1/a;p)\theta(x_1;p)\theta(x_2/a;p)\theta(x_3/a;p)\theta(x_2x_3;p)\theta(x_2/x_3;p)\\
&\quad+ax_1x_2\theta(-p^{\frac{1}{2}}x_2;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}x_2/a;p)\theta(x_2;p)\theta(x_1/a;p)\theta(x_3/a;p)\theta(x_1x_3;p)\theta(x_3/x_1;p)\\
&\quad+ax_2x_3\theta(-p^{\frac{1}{2}}x_3;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}x_3/a;p)\theta(x_3;p)\theta(x_1/a;p)\theta(x_2/a;p)\theta(x_1x_2;p)\theta(x_1/x_2;p)\\
&=x_1x_2x_3\theta(-p^{\frac{1}{2}};p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}a;p)\theta(x_1/x_2;p)\theta(x_2/x_3;p)\theta(x_3/x_1;p)\theta(a;p)\theta(x_1x_2x_3/a;p)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{H}_3^{(p)}$ の参照点と補間基底 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_3^{(p)} = 6$

$$\theta(p^{\frac{1}{2}}z_2;p)\theta(p^{\frac{1}{2}}z_1z_2;p)\theta(p^{\frac{1}{2}}z_1z_2^2;p),\ \theta(-p^{\frac{1}{2}}z_2;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}z_1z_2;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}z_1z_2^2;p) \in \mathcal{H}_1^{(p)}$$

であり，これら2つの函数は $\mathcal{H}_1^{(p)}$ の基底になる．次に

$$F_{i+} := F_i(z) \times \theta(p^{\frac{1}{2}}z_2;p)\theta(p^{\frac{1}{2}}z_1z_2;p)\theta(p^{\frac{1}{2}}z_1z_2^2;p) \in \mathcal{H}_3^{(p)}$$

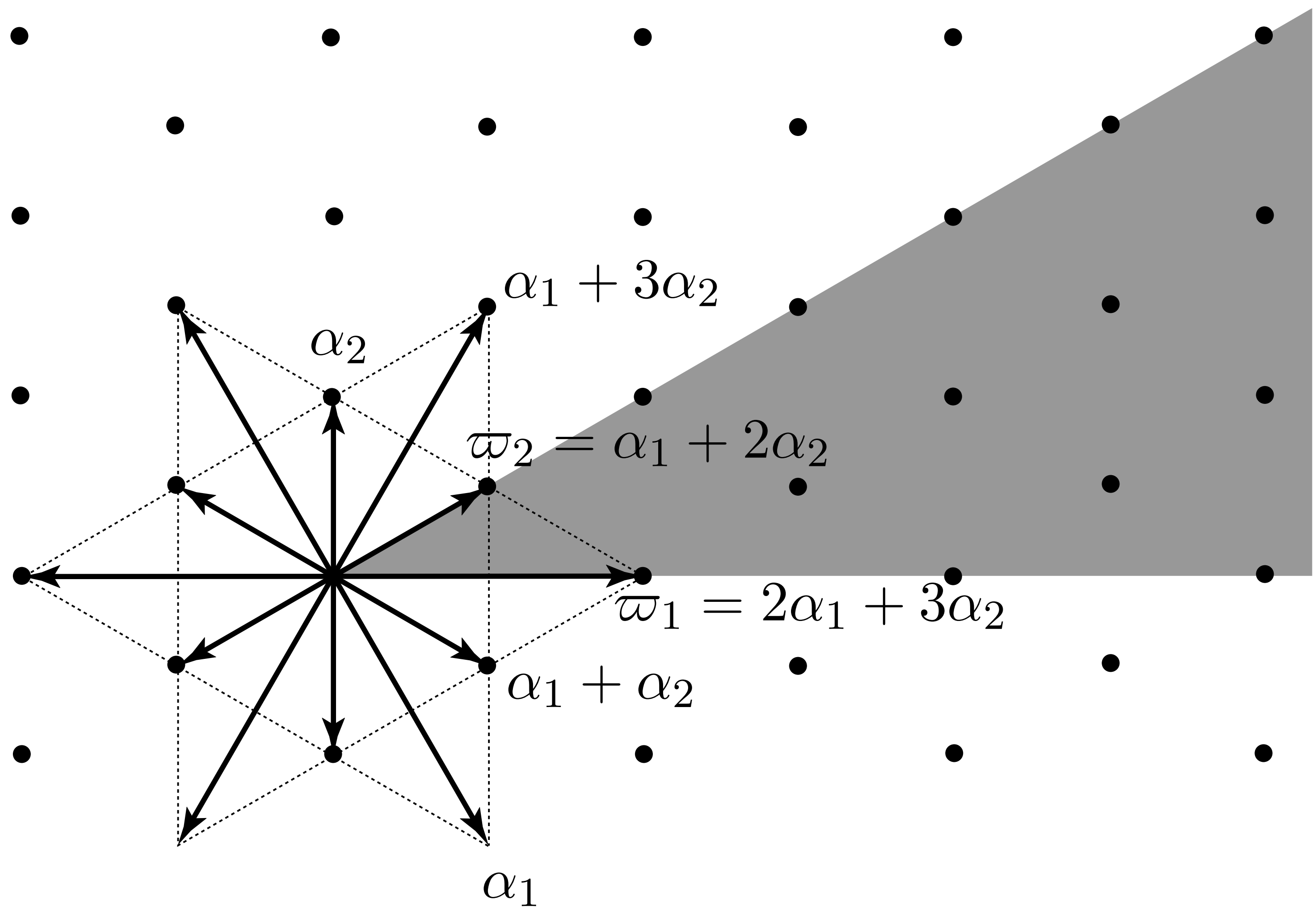
$$F_{i-} := F_i(z) \times \theta(-p^{\frac{1}{2}}z_2;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}z_1z_2;p)\theta(-p^{\frac{1}{2}}z_1z_2^2;p) \in \mathcal{H}_3^{(p)}$$

$\mathrm{p}_{i+} := (a_ip^{-\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}})$ $\Big($つまり $z = \mathrm{p}_{i+}$ のとき $z_2 = p^{\frac{1}{2}},\ z_1z_2 = a_i,\ z_1z_2^2 = a_ip^{\frac{1}{2}}\Big)$,

$\mathrm{p}_{i-} := (-a_ip^{-\frac{1}{2}}, -p^{\frac{1}{2}})$ $\Big(z = \mathrm{p}_{i-}$ のとき $z_2 = -p^{\frac{1}{2}},\ z_1z_2 = a_i,\ z_1z_2^2 = -a_ip^{\frac{1}{2}}\Big)$.

	p_{2-}	p_{2+}	p_{1-}	p_{1+}	p_{12}	p_{12}^*
$F_{1+}(z)$	$*$	0	0	0	0	0
$F_{1-}(z)$	0	$*$	0	0	0	0
$F_{2+}(z)$	0	0	$*$	0	0	0
$F_{2-}(z)$	0	0	0	$*$	0	0
$H_1(z)$	0	0	0	0	$*$	0
$H_2(z)$	0	0	0	0	0	$*$

となるような $\mathcal{H}_3^{(p)}$ の補間基底がとれる．$H_i(z)$ の構成法は略.


$\alpha_1 + 3\alpha_2$
α_2
$\varpi_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$
$\varpi_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$
$\alpha_1 + \alpha_2$
α_1