# Lagrange 型補間函数と $q$ 差分 de Rham の方法

(述) 野海 正俊　(神戸大学・大学院理学研究科)
(記) 山口 航平 (名古屋大学・多元数理科学研究科)

## 目次



## 序

ここ数年, Selberg 型の楕円超幾何積分を系統的に理解したいという動機で, 琉球大学の伊藤雅彦さんと共同研究を進めてきました. 青本・伊藤流の $q$ 差分 de Rham の方法と Lagrange 型の楕円補間函数の考え方を組み合わせるというのが基本的なアイディアなのですが, 最近, 一つの目標だった $BC_n$ の Selberg 型楕円超幾何積分に対する行列式公式の定式化と証明が出来たので, 今日はそれに関連する話をしたいと思います. Lagrange 型の多変数補間函数ついては, 三角の場合と楕円の場合を平行に議論できて, しかも積分の議論とは独立した話題として話せるので, 少し

詳しめにお話しします．その後で, $q$ 差分 de Rham の方法を説明して, $q$ 超幾何積分や楕円超幾何積分の設定で, 補間函数がどの様な役割を果たすかについて, 1 変数の積分の具体的な例を通じてお話ししたいと思います. Lagrange 型の補間函数は本来, 多重積分の $q$ 差分 de Rham の舞台で活躍するのですが, 議論が細かくなってしまうので, 多重積分に関わる部分は結果を紹介するだけにします．興味を持たれた方は直接論文を見て下さい．では，本題に入ります．

# 1 Lagrange 型補間函数

## 1.1 補間基底

$\mathbb{C}^n$ の開集合 $D$ 上の正則函数の全体を $\mathcal{O}(D)$ で表し, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{O}(D)$ を有限次元の $\mathbb{C}$ 線型部分空間とします．$\Lambda$ を添字集合とする $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$ 基底 $\{E_\lambda(z)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と同じ添字集合を持つ $D$ の点の族 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 条件

$$E_\mu(a_\nu) = \delta_{\mu,\nu} \qquad (\mu, \nu \in \Lambda) \tag{1.1}$$

が成立するとき, $\{E_\lambda(z)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を参照点の族 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に関する**補間基底**と呼ぶことにします．$\mathcal{H}$ がこの意味での補間基底を持てば, $\mathcal{H}$ に属する任意の函数 $f(z)$ が

$$f(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda E_\lambda(z) \qquad c_\lambda = f(a_\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda) \tag{1.2}$$

と展開され, 展開係数は参照点での値として得られる訳です．まず, 補間基底の基本的な例をいくつか見ておきます.

**例 1.1**（$A_0$ 型） 高々 $(s-1)$ 次の 1 変数多項式の全体

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}[z]_{\leq s-1} = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}z \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}z^{s-1} \tag{1.3}$$

は $s$ 次元. 相異なる $s$ 個の点 $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$ を任意に取ると, 参照点の族 $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ に関する補間基底は

$$E_i(z) = \prod_{1\leq j\leq s,\ j\neq i} \frac{z-a_j}{a_i-a_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1.4}$$

で与えられ, 任意の $f(z) \in \mathcal{H}$ は

$$f(z) = \sum_{i=1}^{s} f(a_i) \prod_{j\neq i} \frac{z-a_j}{a_i-a_j} \tag{1.5}$$

と表示される．これが通常の **Lagrange 補間**です．この式の両辺を $\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)$ で割ったものが, 部分分数展開の公式

$$\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{s}(z-a_j)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{f(a_i)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)} \frac{1}{z-a_i} \tag{1.6}$$

という訳です.

**例 1.2（$BC_1$ 型, 三角の場合）**　今度は, 高々 $(s-1)$ 次の Laurent 多項式で, 変数の反転 $z \to z^{-1}$ に関して対称なものの全体 $\mathcal{H}$ を考えます.

$$\mathcal{H} = \left\{ f(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \mid f(z^{-1}) = f(z),\ \deg_z f(z) \leq s-1 \right\} \tag{1.7}$$

任意の $f(z) \in \mathcal{H}$ は

$$f(z) = c_{s-1} z^{s-1} + c_{s-2} z^{s-2} + \cdots + c_{-s+1} z^{-s+1}, \quad c_{-k} = c_k \tag{1.8}$$

と表されるので, $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$ 線型空間しての次元は $s$ です. このような設定では, 2 変数の函数

$$e(z,w) = z + z^{-1} - w - w^{-1} = -w^{-1}(1-wz)(1-w/z) \tag{1.9}$$

を導入しておくと便利です. この函数は, $e(w,z) = -e(z,w)$, $e(z,z) = 0$ を満たし, $z = e^{iu}$, $w = e^{iv}$ とおくと $\frac{1}{2}e(z,w) = \cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$. 参照点の族として相異なる $s$ 点 $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ を取ると, 対応する $\mathcal{H}$ の補間基底は,

$$E_i(z) = \prod_{j \neq i} \frac{e(z,a_j)}{e(a_i,a_j)} = \prod_{j \neq i} \frac{(1-a_j z)(1-a_j/z)}{(1-a_j a_i)(1-a_j/a_i)} \tag{1.10}$$

で与えられます. これは, 上記の Lagarange の補間基底で, $z-a$ を形式的に $e(z,a)$ に置き換えたもの. 任意の $f(z) \in \mathcal{H}$ をこの補間基底で展開すると

$$f(z) = \sum_{i=1}^{s} f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{(1-a_j z)(1-a_j/z)}{(1-a_j a_i)(1-a_j/a_i)} \tag{1.11}$$

となります.

**例 1.3（$BC_1$ 型, 楕円の場合）**　少し記号を準備します. $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$ を底として固定して, 以下では $q$ 無限積と乗法的 Jacobi テータ函数の記号

$$(z;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i z) \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.12}$$

$$\theta(z;q) = (z;q)_\infty (q/z;q)_\infty = (1-z)(qz;q)_\infty (qz^{-1};q)_\infty \qquad (z \in \mathbb{C}^*) \tag{1.13}$$

を使うことにします. $q \to 0$ としたとき $\theta(z;q) \to 1-z$ となることに注意して下さい. この記法では $\theta(z;q)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の正則函数で, Laurent 展開が Jacobi の**三重積公式**で与えられます.

$$\theta(z;q)(q;q)_\infty = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} z^k \tag{1.14}$$

さて, $BC_1$ 型の例 1.2 の楕円テータ版として, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ の $\mathbb{C}$ 線型部分空間

$$\mathcal{H} = \left\{ f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \mid f(z^{-1}) = f(z),\ f(qz) = f(z)(qz^2)^{-s+1} \right\} \tag{1.15}$$

を考えます. Laurent 多項式の場合の次数の条件を, この擬周期性の条件に置き換えると, $\mathcal{H}$ の次元 が丁度 $s$ となります (詳細は省略). この設定では, 2 変数の基本函数として

$$e(z,w|q) = -w^{-1}\theta(zw;q)\theta(w/z;q) = (z + z^{-1} - w - w^{-1})(qz^{\pm 1}w^{\pm 1};q)_\infty \tag{1.16}$$

を使います．この函数については

$$e(w,z|q)=-e(z,w|q),\quad e(z,z|q)=0,\quad e(qz,w|q)=e(z,w|q)(qz^2)^{-1} \tag{1.17}$$

が成り立ち, $q\to 0$ のとき, 三角の場合の $e(z,a)$ に退化します．参照点として一般 (generic) な $s$ 点 $a_1,\ldots,a_s\in\mathbb{C}^*$ を取ると, 対応する補間基底は, 次で与えられます．

$$E_i(z|q)=\prod_{j\neq i}\frac{e(z,a_j|q)}{e(a_i,a_j|q)}=\prod_{j\neq i}\frac{\theta(a_jz;q)\theta(a_j/z;q)}{\theta(a_ja_i;q)\theta(a_j/a_i;q)}\quad (i=1,\ldots,s) \tag{1.18}$$

$E_i(a_j|q)=\delta_{i,j}$ が成立することはこの定義から明白ですが, $e(z,w;q)$ の擬周期性から, $E_i(z;q)$ は $\mathcal{H}$ に属し, $\mathcal{H}$ の補間基底となるという訳です．任意の $f(z)\in\mathcal{H}$ はこれらの函数を用いて

$$f(z)=\sum_{i=1}^{s}f(a_i)E_i(z|q)=\sum_{i=1}^{s}f(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{\theta(a_jz;q)\theta(a_j/z;q)}{\theta(a_ja_i;q)\theta(a_j/a_i;q)} \tag{1.19}$$

と展開されることになります．

有理・三角・楕円という階層を念頭において,「$BC_1$ 型, 有理の場合」についても注意しておきましょう．同じ $z$ で書きますが, この場合は加法的変数で,

$$\mathcal{H}=\{f(z)\in\mathbb{C}[z]\mid f(-z)=f(z),\ \ \deg_z f(z)\le 2(s-1)\} \tag{1.20}$$

とします．偶の多項式なので, 要は $z^2$ の高々 $(s-1)$ 次多項式の全体です．この場合, $e(z,w)=z^2-w^2=(z+w)(z-w)$ を基本函数とします．1 変数の場合は, いずれにしても本質的に Lagrange 補間です．

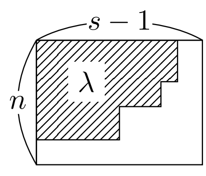
## 1.2 $BC_n$ 型の補間函数

$B_n$ 型あるいは $C_n$ 型の Weyl 群は $W_n=\{\pm1\}^n\rtimes\mathfrak{S}_n$ で, 超八面体群ですね．以下では, $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を $n$ 次元代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系とします．Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[z^{\pm1}]=\mathbb{C}[z_1^{\pm1},\ldots,z_n^{\pm1}]$ を考えると, $W_n$ は $z_1,\ldots,z_n$ の添字の置換と座標の反転 $z_i\mapsto z_i^{-1}$ として $\mathbb{C}[z^{\pm1}]$ に作用します．そこで, $n$ 変数の Laurent 多項式で, $W_n$ の作用に関して不変なもの全体を $\mathbb{C}[z^{\pm1}]^{W_n}$ と表します．$s=1,2,\ldots$ に対して, 次の $\mathbb{C}$ 線型空間を考えます．

$$\mathcal{H}_{s-1,n}=\left\{f(z)\in\mathbb{C}[z^{\pm1}]^{W_n}\ \middle|\ \deg_{z_i}f(z)\le s-1,\ i=1,\ldots,n\right\} \tag{1.21}$$

$\mathcal{H}_{s-1,n}$ に属する Laurent 多項式とは, 単項式 $z_1^{\mu_1}\cdots z_n^{\mu_n}\quad(-s+1\le\mu_i\le s-1)$ の和で表されて, $W_n$ の作用で不変なもののことです．そこで, $n\times(s-1)$ の長方形に含まれる任意の分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\subseteq((s-1)^n)$, $(\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n\ge0,\lambda_1\le s-1)$ に対して

$$m_\lambda(z)=\sum_{\mu\in W_n.\lambda}z^\mu$$




(1.22)

と定義します. こういうものは, 軌道和とか $BC_n$ 型の単項型対称多項式と言ったりしますね. このとき

$$\mathcal{H}_{s-1,n} = \bigoplus_{\lambda\subseteq((s-1)^n)} \mathbb{C}m_\lambda(z), \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{s-1,n} = \binom{n+s-1}{n} = \binom{n+s-1}{s-1} \tag{1.23}$$

という風になります. この空間の次元は, 重複組合せの数なので, $s$ 次元の多重指数で次数が $n$ のものの個数と同じです. つまり,

$$Z_{s,n} = \{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathbb{N}^s \mid |\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_s = n\} \quad (\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{1.24}$$

と定義すると, $|Z_{s,n}| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{s-1,n}$ となりますね. この $Z_{s,n}$ を $\mathcal{H}_{s-1,n}$ の補間基底の添字集合に使います.

今, $s$ 次元の代数的トーラスの一般の点 $a = (a_1, \ldots, a_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ を一つ固定します. $s$ 次元の多重指数 $\mu \in Z_{s,n}$ が与えられたとき, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ $(|\mu| = n)$ を使って $n$ 次元の座標 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ を $z = (\underbrace{z_1, \ldots, z_{\mu_1}}_{\mu_1} | \underbrace{z_{\mu_1+1} \ldots}_{\mu_2} | \ldots | \underbrace{z_{n-\mu_s+1} \ldots, z_n}_{\mu_s})$ と $s$ 個のブロックに分割して, 参照点 $(a)_{t,\mu} \in (\mathbb{C}^*)^n$ を次のように決めます.

$$(a)_{t,\mu} = (\underbrace{a_1, ta_1, \ldots, t^{\mu_1-1}a_1}_{\mu_1} | \ \ldots \ | \underbrace{a_s, ta_s, \ldots, t^{\mu_s-1}a_s}_{\mu_s}), \quad t \in \mathbb{C}^* \tag{1.25}$$

$t \in \mathbb{C}^*$ はパラメータです. このような決め方を**多重主特殊化**と呼んだりします. $BC_n$ 型の三角版の補間基底の存在については, 次の定理が知られています.

**定理 1.4（伊藤・野海 [1], 2016）** $a = (a_1, \ldots, a_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$, $t \in \mathbb{C}^*$ を一般にとる. このとき $\mathcal{H}_{s-1,n}$ の $\mathbb{C}$ 基底 $\{E_\mu(a; z)\}_{\mu\in Z_{s,n}}$ であって補間条件

$$\mathcal{H}_{s-1,n} = \bigoplus_{\mu\in Z_{s,n}} \mathbb{C}E_\mu(a; z), \quad E_\mu(a; (a)_{t,\nu}) = \delta_{\mu,\nu} \ (\mu, \nu \in Z_{s,n})$$

を満たすものがただ一つ存在する.

楕円版の補間基底に関しても, $\mathbb{C}$ 線型空間

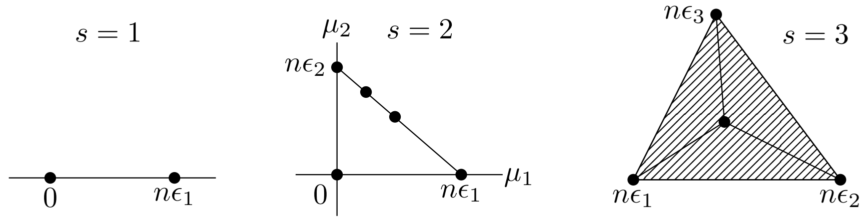
$$\mathcal{H}^{(q)}_{s-1,n} = \left\{f(z) \in \mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n)^{W_n} \mid T_{q,z_i} f(z) = f(z)(qz_i^2)^{-s+1} \ (i = 1, \ldots, n)\right\} \tag{1.26}$$

に, 三角版のときと同じ参照点の族に関する補間基底が存在します. ($T_{q,z_i}$ と書いたのは, $z_i$ に関する $q$ シフトの作用素: $T_{q,z_i}(z_j) = q^{\delta_{i,j}} z_j$.)

$$\mathcal{H}^{(q)}_{s-1,n} = \bigoplus_{\mu\in Z_{s,n}} \mathbb{C}E_\mu(a; z|q), \quad E_\mu(a; (a)_{t,\nu}|q) = \delta_{\mu,\nu} \ (\mu, \nu \in Z_{s,n}) \tag{1.27}$$

$BC_n$ 型の三角および楕円の補間函数の詳細については, 文献 [1], [3] を参照して下さい.

ここで用いた補間基底の添字集合 $Z_{s,n}$ は, $\mathbb{N}^s = \mathbb{N}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}\epsilon_s$ 内で, 頂点 $n\epsilon_1, \ldots, n\epsilon_s$ が定義する $(s-1)$ 単体上の格子点の集合です.



(1.28)

## 1.3 帰納的構成

$BC_n$ 型の三角版および楕円版の補間基底を具体的に構成する手順は, 幾つかありますが, 今回は $n$ に関する帰納的構成から出発します. 三角版を中心に説明しますが, 楕円版でも同様です.

● $n=1$ のとき. $Z_{s,1} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s\}$, $(a)_{\epsilon_k} = a_k$ という設定で三角版の補間基底は

$$E_{\epsilon_i}(a; z_1) = \prod_{1\le j\le s,\ j\ne i} \frac{e(z_1, a_j)}{e(a_i, a_j)}, \quad e(z,a) = z + z^{-1} - a - a^{-1} \tag{1.29}$$

で, 楕円版は

$$E_{\epsilon_i}(a; z_1|q) = \prod_{1\le j\le s,\ j\ne i} \frac{e(z_1, a_j|q)}{e(a_i, a_j|q)}, \quad e(z, a|q) = -a^{-1}\theta(az;q)\theta(a/z;q) \tag{1.30}$$

となることが分かると思います.

● $n \ge 2$ のとき. $\mu \in Z_{s,n}$ に対して, $E_\mu(a;z) = E_\mu(a; z_1, \ldots, z_n)$ を次のように帰納的に定義します.

$$E_\mu(a; z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k:\mu_k>0} E_{\mu-\epsilon_k}(a; z_1, \ldots, z_{n-1}) E_{\epsilon_k}(t^{\mu-\epsilon_k}a; z_n) \tag{1.31}$$

$z_n$ の補間函数の参照点のパラメータを $t^{\mu-\epsilon_k}a = (t^{\mu_1}a_1, \ldots, t^{\mu_k-1}a_k, \ldots, t^{\mu_s}a_s)$ にずらしてあることが要点です. このように構成した $E_\mu(a;z)$ が補間条件を満たすことを, 直接確かめることができます. この構成は, 変数の順序 $z_1, \ldots, z_n$ に依存しているので, $E_\mu(a;z)$ が $W_n$ 不変となる保証はありません. 結果として $E_\mu(a;z)$ が $z_1, \ldots, z_n$ について対称となるのは全く非自明なことで, 別途証明する必要があります.

## 1.4 双対 Cauchy 核

二つの変数の組 $z = (z_1 \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_{s-1})$ について,

$$\mathcal{H}_{s-1,n} \ni \Psi(z;w) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i, w_j) = \sum_{\mu\in Z_{s,n}} E_\mu(a;z) F_\mu(a;w) \tag{1.32}$$

が成り立ちます．ただし，

$$F_\mu(a;w) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-1} e(a_i,w_j)_{t,\mu_i} \tag{1.33}$$

$$e(a_i,w_j)_{t,\mu_i} = \overbrace{e(a_i,w_j)e(ta_i,w_j)\cdots e(t^{\mu_i-1}a_i,w_j)}^{\mu_i} \tag{1.34}$$

という記号を用いました．

$$\Psi(z;w) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i,w_j) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1}(z_i+z_i^{-1}-w_j-w_j^{-1}) \tag{1.35}$$

が双対 Cauchy 型の核函数 (三町の核函数) です．

## 1.5　変数の分割

任意の $\mu,\nu\in\mathbb{N}^s$ に対して

$$F_\mu(a;w)F_\nu(t^\mu a;w) = F_{\mu+\nu}(a;w) \tag{1.36}$$

が成り立つことに注意します．これは

$$e(a_i,w_j)_{t,\mu_i}e(t^{\mu_i}a_i,w_j)_{t,\nu_i} = e(a_i,w_j)_{\mu_i a_i+\nu_i} \tag{1.37}$$

からすぐに分かると思います．例えば次の例

$$F_{\mu-\epsilon_k}(a;w)F_{\epsilon_k}(t^{\mu-\epsilon_k}a;w) = F_\mu(a;w) \tag{1.38}$$

を計算してみれば感じが掴めるでしょう．さて $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を $z=(\overbrace{z'}^{\ell},\overbrace{z''}^{n-\ell})$ と変数を変数を分割してみます．双対 Cauchy 核からはじめて

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in Z_{s,n}} E_\lambda(a;z)F_\lambda(a;w) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i,w_j) \\
&= \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i,w_j) \prod_{i=\ell+1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i,w_j) \\
&= \sum_{\mu\in Z_{s,\ell}} E_\mu(a;z')F_\mu(a;w) \prod_{i=\ell+1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i,w_j) \\
&= \sum_{\mu\in Z_{s,\ell}} E_\mu(a;z')F_\mu(a;w) \sum_{\nu\in Z_{s,n-\ell}} E_\nu(t^\mu a;z'')F_\nu(t^\mu a;w) \\
&= \sum_{\mu,\nu} E_\mu(a;z')E_\nu(t^\mu a;z'')F_{\mu+\nu}(a;w) \\
&= \sum_{\lambda}\left(\sum_{\mu+\nu=\lambda,\ |\mu|=\ell,\ |\nu|=n-\ell} E_\mu(a;z')E_\nu(t^\mu a;z'')\right)F_\lambda(a;w)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

となるので

$$E_\lambda(a;z) = \sum_{\mu+\nu=\lambda,\ |\mu|=\ell,\ |\nu|=n-\ell} E_\mu(a;z')E_\nu(t^\mu a;z'') \tag{1.40}$$

が成り立つことが分かりました.

今は, 結果を先に説明してしまいましたが, 最初に述べた帰納的構成法で $E_\lambda(a;z)$ を定義すると, ここで述べた議論を逆に辿って $E_\lambda(a;z)$ が双対 Cauchy 核の関係式を満たすことが分かり, そこから $E_\lambda(a;z)$ の $z=(z_1,\ldots,z_n)$ についての対称性も従う — というのが一つの議論の筋道です.

## 1.6 $E_\mu(a;z)$ の基本事項

ここで $E_\mu(a,z)$ に関する基本的なことを一気にまとめておきます.

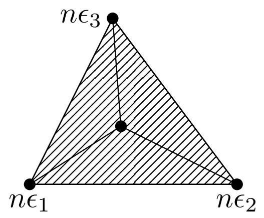
(1) 帰納的構成

$$n=1 \quad E_{\epsilon_i}(a;z_i) = \prod_{j\neq i}\frac{e(z_i,a_j)}{e(a_i,a_j)} \tag{1.41}$$

$$n\geq 2 \quad E_\mu(a;z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k:\mu_k>0} E_{\mu-\epsilon_k}(a;z_1,\ldots,z_{n-1})E_{\epsilon_k}(t^{\mu-\epsilon_k}a;z_n) \tag{1.42}$$

(2) $s-1$ 単体の頂点と面

$$E_{n\epsilon_k}(a;z) = \prod_{j\neq k}\frac{\prod_{i=1}^n e(z_i,a_j)}{e(a_k,a_j)_{t,n}}$$




(1.43)

$$E_{(\mu_1,\ldots,\mu_{s-1},0)}(a;z) = E_{(\mu_1,\ldots,\mu_{s-1})}(a_1,\ldots,a_{s-1};z)\frac{\prod_{i=1}^n e(z_i,a_s)}{\prod_{j=1}^{s-1} e(a_j,a_s)_{t,\mu_j}} \tag{1.44}$$

(3) 双対 **Cauchy** 核

$$\Psi(z;w) = \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^{s-1} e(z_i,w_j) = \sum_{\mu\in Z_{s,n}} E_\mu(a,z)F_\mu(a,w) \tag{1.45}$$

$$F_\mu(a;w) = \Psi((a)_{t,\mu};w) = \prod_{i=1}^s\prod_{j=1}^{s-1} e(a_i,w_j)_{t,\mu_i} \tag{1.46}$$

(4) 変数の分割

$z = (\overbrace{z'}^{\ell}, \overbrace{z''}^{n-\ell})$ とする.

$$E_\lambda(a;z) = \sum_{\mu+\nu=\lambda,\ |\mu|=\ell,\ |\nu|=n-\ell} E_\mu(a;z')E_\nu(t^\mu a;z'') \tag{1.47}$$

(5) 明示公式[*1]

$$\begin{aligned} &E_\mu(a;z) \\ &= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\in\{1,\dots,s\},\\ \epsilon_{k_1}+\cdots+\epsilon_{k_n}=\mu}} E_{\epsilon_{k_1}}(a;z_1)E_{\epsilon_{k_2}}(t^{\epsilon_{k_1}}a;z_2)\cdots E_{\epsilon_{k_n}}(t^{\epsilon_{k_1}+\cdots+\epsilon_{k_{n-1}}}a;z_n) \end{aligned} \tag{1.48}$$

(6) 特殊値　$[a]=-a^{-\frac{1}{2}}(1-a)=a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$, $[a]_k=[a][ta]\cdots[t^{k-1}a]$ とおくと,

$$E_\mu(a;(u)_{t,n}) = \prod_{1\le i<j\le s}\frac{[t^{\mu_i-\mu_j}a_i/a_j]}{[a_i/a_j]}\frac{[t]_n\prod_{i=1}^s[u/a_i]_{n-\mu_i}[t^{\mu_i}ua_i]_{n-\mu_i}}{\prod_{i,j=1}^s[ta_i/a_j]_{\mu_i}\prod_{1\le i<j\le s}[a_ia_j]_{\mu_i+\mu_j}} \tag{1.49}$$

ここで $(u)_{t,n}=(u,tu,\dots,t^{n-1}u)$ と記した (主特殊化). 楕円版の場合は $[a]=-a^{-\frac{1}{2}}\theta(a;q)$ とする.

## 1.7 パラメータの変更に伴う接続係数

パラメータ $a=(a_1,\dots,a_s)$ を別の $b=(b_1,\dots,b_s)$ に変更するときの $E_\mu(a;z)$ と $E_\nu(b;z)$ の間の接続係数 $C_{\mu,\nu}(a,b)$ を考えます.

$$E_\mu(a,z)=\sum_{\nu\in Z_{s,n}}C_{\mu,\nu}(a,b)E_\nu(b,z) \qquad (\mu\in Z_{s,n}) \tag{1.50}$$

補間函数の性質から, 接続係数 $C_{\mu,\nu}(a,b)$ は, $E_\mu(a;z)$ の $(b)_{t,\nu}$ での値として求められることになります.

$$C_{\mu,\nu}(a,b)=E_\mu(a;(b)_{t,\nu}) \quad (\mu,\nu\in Z_{s,n}). \tag{1.51}$$

この種の係数が面白いのは, 接続行列 $C(a,b)=\big(C_{\mu,\nu}(a,b)\big)_{\mu,\nu\in Z_{s,n}}$ が自動的に次の関係式を満たすことです.

$$C(a,a)=I_{Z_{s,n}}, \quad C(a,b)C(b,c)=C(a,c), \quad C(b,a)=C(a,b)^{-1}. \tag{1.52}$$

接続係数は, 二項係数の一般化と思うことができて, この接続行列式の関係式を, 行列成分で書き下したものは, 超幾何級数の和公式や変換公式の源泉でもあります. なお, 今の場合の接続係数 $C_{\mu,\nu}(a,b)$ は, 双対 Cauchy 公式を経由して $F_\nu(b;w)$ と $F_\mu(a;w)$ の間の接続係数にもなっています.

$$F_\nu(b,w)=\sum_{\mu\in Z_{s,n}}F_\mu(a,z)C_{\mu,\nu}(a,b) \quad (\nu\in Z_{s,n}) \tag{1.53}$$

接続係数 $C_{\mu,\nu}(a,b)$ のうち, $b=(a_1,\dots,a_{s-1},b_s)$ のように, パラメータを 1 個だけ変更する場合については, 文献 [3] でも取り扱いましたが, 一般の $b=(b_1,\dots,b_s)$ の場合の明示公式については, まだ論文に書いていないので, ここでお話しするのが初出です.

さて, $C_{\mu,\nu}(a,b)$ をどう計算するか — ということですが,

$$C_{\mu,\nu}(a,b)=E_\mu(a;(b)_{t,\nu})=E_\mu(a;(b_1)_{t,\nu_1},\cdots,(b_s)_{t,\nu_s}) \tag{1.54}$$

[*1] (1) または (4) を一変数ずつ繰り返し使うと次の明示公式を得る.

に, 変数を分割する公式 (4) を使うと, 次の表示が得られます.

$$C_{\mu,\nu}(a,b)=\sum_{\substack{\mu^{(1)}+\cdots+\mu^{(s)}=\mu\\ |\mu^{(1)}|=\nu_1,\ldots,|\mu^{(s)}|=\nu_s}}\prod_{l=1}^{s}E_{\mu^{(l)}}(t^{\sum_{k<l}\mu^{(k)}}a;(b_l)_{t,\nu_l}) \tag{1.55}$$

というわけで, 接続係数 $C_{\mu,\nu}(a,b)$ は, (6) で述べた補間函数の特殊値 $E_\mu(a;(u)_{t,n})$ の組み合わせで, 因子化した有理式の和の形に表されることが分かります. 和をとるときに動かす多重指数の $s$ 個の組 $(\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(s)})$ に $s\times s$ 行列

$$m=(m_{i,j})_{i,j};\quad m_{i,j}=\mu_i^{(j)}\quad (i,j=1,\ldots,s) \tag{1.56}$$

を対応させて, 和をとる添字集合を

$$\mathbb{M}_{\mu,\nu}=\Big\{m=(m_{i,j})_{i,j=1}^{s}\in \mathrm{Mat}(s;\mathbb{N})\mid\ \textstyle\sum_j m_{i,j}=\mu_i,\ \sum_i m_{i,j}=\nu_j\Big\} \tag{1.57}$$

に置き換えて書き下すと, 最終的な結果は次のようになります.

$$\begin{aligned}C_{\mu,\nu}(a,b)=&\prod_{1\le i<j\le s}\frac{[t^{\mu_i-\mu_j}a_i/a_j]}{[a_i/a_j]}\frac{\prod_{\ell=1}^{s}[t]_{\nu_\ell}}{\prod_{1\le i<j\le s}[a_ia_j]_{\mu_i+\mu_j}}\\ &\cdot\sum_{m=(m_{ij})\in\mathbb{M}_{\mu,\nu}}\frac{\prod_{\ell=1}^{s}\prod_{i=1}^{s}[t^{-m_{i,<\ell}}b_\ell/a_i]_{\nu_\ell-m_{i,\ell}}[t^{m_{i,\le\ell}}b_\ell a_i]_{\nu_\ell-m_{i,\ell}}}{\prod_{\ell=1}^{s}\prod_{i,j=1}^{s}[t^{1+m_{i,<\ell}-m_{j,<\ell}}a_i/a_j]_{m_{i,\ell}}}\end{aligned} \tag{1.58}$$

ここで, $m_{i,<\ell}=\sum_{j<\ell}m_{i,j}$ と略記しました.

$s=2$ の場合に, 接続関係 (1.53) や, 接続行列の関係式 (1.52), $C_{\mu,\nu}(a,b)$ の添え字に関する対称性を表す式などを書き下すと, $q$ 超幾何級数の和公式や変換公式 (Jackson, Bailey) になっていますので, 興味のある人は自分で計算してみて下さい. 一般の $s$ の場合に掲げた式も, 超幾何型多重級数の和公式・変換公式と呼んで良いものだと思います.

蛇足ですが, 多重指数の組 $(\mu,\nu)$ で $|\mu|=|\nu|=n$ を満たすものに対して定義した自然数行列の集合 $\mathbb{M}_{\mu,\nu}$ は, $n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の誘導表現の間の $\mathfrak{S}_n$ 準同型の空間に対応しています. $n$ の分割 $\mu,\nu$ の組に対して, $M_{\mu,\nu}=|\mathbb{M}_{\mu,\nu}|$ とおくと, 行列 $(M_{\mu,\nu})_{\mu,\nu}$ は Kostka 数 (誘導表現における Specht 加群の重複度) を成分とする行列で三角分解されて

$$M_{\mu,\nu}=\sum_{\lambda\ge\mu,\nu}K_{\lambda,\mu}K_{\lambda,\nu} \tag{1.59}$$

と表されます. 接続行列 $C(a,b)$ から Kostka 的なものを取り出すことができれば, 面白いと思うのですが, どうでしょうか.

# 2　$q$ 差分 de Rham の方法

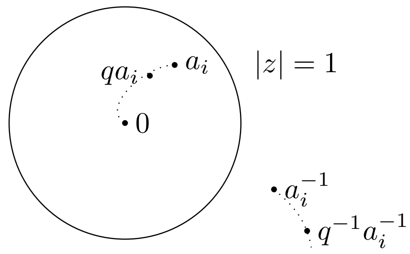
## 2.1　Askey-Wilson と Nassrallah-Rahman の $q$ ベータ積分

ベータ積分というのは皆さんよくご存知のように

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{2.1}$$

ここでは, **Askey-Wilson の $q$ ベータ積分**というものを紹介します. パラメータ $a_1, \ldots, a_4$ に対して, 次の形の積分を考えます.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^2;q)_\infty (z^{-2};q)_\infty}{\prod_{i=1}^4 (a_i z;q)_\infty (a_i z^{-1};q)_\infty}\frac{dz}{z} \tag{2.2}$$




取り敢えず, $|a_i| < 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ と仮定して, 積分路 $C$ としては単位円 $|z| = 1$ を正方向に 1 周するものをとっておきます. 原点に向かう 4 つの極の系列 $q^k a_i$ $(i = 1, \ldots, 4; k = 0, 1, 2, \ldots)$ と無限遠に向かう 4 つの極の系列 $q^{-k}a_i^{-1}$ $(i = 1, \ldots, 4; k = 0, 1, 2, \ldots)$ が, 単位円 $|z| = 1$ で分離されていることに注意して下さい. この積分の値は, 驚くべきことに, 次のように因子化することが知られています.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^{\pm 2};q)_\infty}{\prod_{i=1}^4 (a_i z^{\pm 1};q)_\infty}\frac{dz}{z} = \frac{2}{(q;q)_\infty}\frac{(a_1a_2a_3a_4;q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_j;q)_\infty} \tag{2.3}$$

左辺の被積分函数では, 複号 $\pm$ を, $(az^{\pm 1};q)_\infty = (az;q)_\infty (az^{-1};q)_\infty$ のように, 符号を取り替えて作った因子の積の意味に使っています. 一般のパラメータ $a_1, \ldots, a_4$ でも, $z = 0$ を正方向に 1 周する積分路 $C$ を, 原点に向かう 4 つの極の系列を左側に, 無限遠に向かう 4 つの極の系列を右側に見るように取れる状況であれば, 同じ公式が成立します.

Askey-Wilson の $q$ ベータ積分の 1 パラメータ拡張として, **Nassrallah-Rahman の $q$ ベータ積分**というものも知られています. $a_1, \ldots, a_6 \in \mathbb{C}^*$ が条件 $a_1 \cdots a_6 = q$ を満たすとき,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^{\pm 2};q)_\infty (qa_6^{-1}z^{\pm 1};q)_\infty}{\prod_{i=1}^5 (a_i z^{\pm 1};q)_\infty}\frac{dz}{z} = \frac{2}{(q;q)_\infty}\frac{\prod_{i=1}^5 (q/a_ia_6;q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 5}(a_ia_j;q)_\infty} \tag{2.4}$$

標準的には, $|a_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, 5)$ と仮定して, 積分路は $|z| = 1$ とします. 一般には, パラメータに対して, 先程と同様, 原点側に向かう極の系列と無限遠側に向かう極の系列を分離できるように積分路 $C$ が取れれば, この公式が成立します.

## 2.2 楕円ベータ積分

まず, **楕円ガンマ函数**というものを導入します (Ruijsenaars の楕円ガンマ函数ともいう). 2 つの底 $p, q \in \mathbb{C}^*$, $|p| < 1$, $|q| < 1$ を固定して,

$$\Gamma(z;p,q) = \frac{(pq/z;p,q)_\infty}{(z;p,q)_\infty}, \quad (z;p,q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty}(1 - p^i q^j z) \tag{2.5}$$

と定義します. 2 重無限積 $(z;p,q)_\infty$ は, $z \in \mathbb{C}$ の正則函数, 楕円ガンマ函数 $\Gamma(z;p,q)$ は $z \in \mathbb{C}^*$ の正則函数で, $p, q$ に関しては対称. これを楕円ガンマ函数と呼ぶ理由は, $\Gamma(z;p,q)$ が次の関係式

を満たすことに因ります.

$$\Gamma(qz;p,q)=\theta(z;p)\Gamma(z;p,q),\quad \Gamma(pq/z;p,q)=\frac{1}{\Gamma(z;p,q)}. \tag{2.6}$$

通常のガンマ函数の場合の $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ で, $s$ を加法的に 1 だけシフトする代わりに, $z$ を $q$ だけ乗法的にシフトすると, $s$ の代わりに $p$ を底とする楕円テータ函数 $\theta(z;p)$ が飛び出してくるという訳です. なお, $p\to 0$ の極限では

$$\Gamma(z;p,q)\to\frac{1}{(z;q)_\infty},\quad \Gamma(pz;p,q)\to(q/z;q)_\infty \tag{2.7}$$

となることにも, 注意して下さい.

パラメータ $a_1,\ldots,a_6\in\mathbb{C}^*$ が条件 $a_1\cdots a_6=pq$ を満たすとき, 次の公式が成立します.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C\frac{\prod_{i=1}^6\Gamma(a_iz^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z^{\pm2};p,q)}\frac{dz}{z}=\frac{2}{(p;p)_\infty(q;q)_\infty}\prod_{1\le i<j\le 6}\Gamma(a_ia_j;p,q) \tag{2.8}$$

$|a_i|<1$ $(i=1,\ldots,6)$ のときは, 単位円 $|z|=1$ を積分路 $C$ にとり, 一般の状況では, パラメータ $(a_1,\ldots,a_6)$ について, 原点側に集積する極の系列と無限遠側に集積する極の系列に重なりが生じないこと仮定して, 両者を分離するような積分路 $C$ をとります. これが**楕円ベータ積分**と呼ばれる Spiridonov の積分公式で, 先ほど紹介した Nassrallah-Rahman の $q$ ベータ積分はこれの特別な場合です. 実際, $a_6$ を $pa_6$ に置き換えてから $p\to 0$ の極限を取れば, Nassrallah-Rahman の積分公式が得られるという事情です.

## 2.3 $q$ 差分 de Rham の考え方

さて, このような積分公式をどうやって証明すればよいでしょうか. そのことについて説明します. まずは Askey-Willson の $q$ ベータ積分から始めましょう. $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ に対して,

$$\Phi(z;a)=\frac{(z^{\pm2};q)_\infty}{\prod_{i=1}^4(a_iz^{\pm1};q)_\infty},\quad I(a)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C\Phi(z;a)\frac{dz}{z} \tag{2.9}$$

とします. 議論を明確にするために, 以下 $|a_i|<1$ $(i=1,\ldots,4)$ と仮定し, 積分路 $C$ は単位円 $|z|=1$ を正方向に 1 周するものとしておきます. このとき $I(a)$ の満たす $q$ 差分方程式を決めたい. 結果を先に書いてしまうと

$$T_{q,a_i}I(a)=\frac{\prod_{j\neq i}(1-a_ia_j)}{1-a_1a_2a_3a_4}I(a)\qquad(i=1,\ldots,4) \tag{2.10}$$

です. $I(a)$ が

$$I(a)=\mathrm{const.}J(a),\quad J(a)=\frac{(a_1a_2a_3a_4;q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_j;q)_\infty} \tag{2.11}$$

と表されることが分かっていれば, $I(a)$ の $q$ 差分方程式は上のようになるはずなのですが, 以下では, 答えを知らずに, どうすれば, $I(a)$ の $q$ 差分方程式を導けるかを説明します.

被積分函数 $\Phi(z;a)$ がパラメータの $q$ シフトに関して次の方程式を満たすことは, 直接確認できます.

$$T_{q,a_i}\Phi(z;a) = (1-a_iz)(1-a_i/z)\Phi(z;a) \quad (i=1,\ldots,4) \tag{2.12}$$

両辺を積分すると

$$T_{q,a_i}\int_C \Phi(z;a)\frac{dz}{z} = \int_C (1-a_iz^{\pm 1})\Phi(z;a)\frac{dz}{z}. \tag{2.13}$$

ここで, $\varphi(z)\Phi(z)$ が $C$ の近傍でとなるような函数 $\varphi(z)$ に対して, 期待値の記号

$$\langle\varphi\rangle_\Phi = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \varphi(z)\Phi(z;a)\frac{dz}{z} \tag{2.14}$$

を導入しておきます. この記号を用いると $I(a)=\langle 1\rangle_\Phi$ で, 上の式は

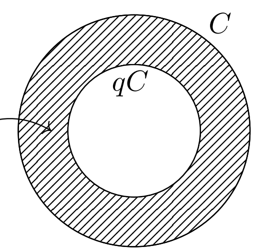
$$T_{q,a_i}\langle 1\rangle_\Phi = \langle(1-a_iz^{\pm 1})\rangle_\Phi \tag{2.15}$$

と書けます.

少し一般論ですが, $\Psi(z)$ を円環領域 $\{|q|\le|z|\le 1\}$ の近傍で正則な函数とすると, Cauchy の積分定理により

$$\begin{aligned}\int_C \Psi(\underbrace{qz}_{w})\frac{dz}{z} &= \int_{qC}\Psi(w)\frac{dw}{w}\\ &= \int_C \Psi(z)\frac{dz}{z}\end{aligned}$$

$\Psi(z)$ はこの近傍で正則




(2.16)

即ち

$$\int_C T_{q,z}\Psi(z)\frac{dz}{z} = \int_C \Psi(z)\frac{dz}{z}, \qquad \int_C (1-T_{q,z})\Psi(z)\frac{dz}{z} = 0 \tag{2.17}$$

となります. 被積分函数の正則域で, 積分路の両側に十分広い隙間が取れれば, 積分は $q$ シフトで不変 — ということが, $q$ 差分 de Rham の考え方の要点です. 後で, このことを使うので, 予め注意しておきます. なお, 多重積分の場合でも, 変数毎に考えれば, 事情は同じです.

元の話に戻って, 以下 $\Phi(z)=\Phi(z;a)$ と略記します. $\Phi(z)$ の $q$ シフトと $\Phi(z)$ の比を考えると

$$b^\Phi(z) = \frac{T_{q,z}\Phi(z)}{\Phi(z)} = \frac{(1-q^{-2}z^{-2})(1-q^{-1}z^{-2})}{(1-z^2)(1-qz^2)}\prod_{i=1}^4\frac{1-a_iz}{1-q^{-1}a_iz^{-1}} \tag{2.18}$$

$$= -\frac{1}{qz^2}\frac{1-q^{-2}z^{-2}}{1-z^2}\prod_{i=1}^4\frac{1-a_iz}{1-a_iq^{-1}z^{-1}} \tag{2.19}$$

(青本先生に倣って, $b^\Phi(z)$ を $b$ 函数と呼びます.) ここで

$$f_+(z) = z^{-1}\frac{\prod_{i=1}^4(1-a_iz)}{1-z^2}, \quad f_-(z) = f_+(z^{-1}) = z\frac{\prod_{i=1}^4(1-a_iz^{-1})}{1-z^{-2}} \tag{2.20}$$

とすれば, $b^{\Phi}(z)$ が

$$b^{\Phi}(z) = -\frac{f_+(z)}{f_-(qz)} \tag{2.21}$$

表されます. 今, 任意に $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ をとると,

$$\begin{aligned}(1-T_{q,z})(f_-(z)\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z)\Phi(z)) &= f_-(z)\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z)\Phi(z) - f_-(qz)\varphi(q^{\frac{1}{2}}z)\Phi(qz) &(2.22)\\ &= \left(f_-(z)\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z) + f_+(z)\varphi(q^{\frac{1}{2}}z)\right)\Phi(z) &(2.23)\end{aligned}$$

そこで, $q$ 差分の**余境界作用素**を

$$\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\varphi(z) = f_+(z)\varphi(q^{\frac{1}{2}}z) + f_-(z)\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z) \tag{2.24}$$

で定義すると

$$(\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\varphi(z))\Phi(z) = (1-T_{q,z})(f_-(z)\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z)\Phi(z)). \tag{2.25}$$

ここで, $f_-(z)\Phi(z)$ が円環領域 $\{|q| \le |z| \le 1\}$ の近傍で正則であることを確認します. まず, $f_-(z)$ の分母の $(1-z^{-2})$ は, $\Phi(z)$ の分子側の $(z^{-2};q)_\infty$ で打ち消されるので, $z=\pm 1$ に極は生じません. また $f_-(z)$ の分子にある $\prod_{i=1}^{4}(1-a_iz)$ によって, $|q| \le |z| \le 1$ にあったかもしれない $\Phi(z)$ の極 $z=a_i$ $(i=1,\dots,4)$ が打ち消されるので, $f_-(z)\Phi(z)$ は $\{|q| \le |z| \le 1\}$ の近傍で正則となっています. という訳で, 先程述べた一般論により

$$\langle \nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\varphi(z)\rangle_\Phi = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C (\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\varphi(z))\Phi(z)\frac{dz}{z} = 0 \qquad (\varphi(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]) \tag{2.26}$$

ということが従います. これは, $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ を色々に取り替えて $\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\varphi(z)$ を計算すれば, その都度, $\Phi(z)$ に付随して定義される

$$\langle \psi(z)\rangle_\Phi = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \psi(z)\Phi(z)\frac{dz}{z} \tag{2.27}$$

の形の積分の間の 1 次関係が得られることを意味しています.

今, 与えられた Laurent 多項式 $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ が変数の反転 $z \to z^{-1}$ に関して不変, 即ち $\varphi(z^{-1}) = \varphi(z)$ を満たすと仮定します. このとき, $\widetilde{\varphi}(z) = \nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\varphi(z)$ とおくと, これは有理函数ですが, $\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}$ の定義から, $\widetilde{\varphi}(z)$ も $\widetilde{\varphi}(z^{-1}) = \widetilde{\varphi}(z)$ を満たすことが確認できます. 一方, $\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}$ の定義から, $\widetilde{\varphi}(z)$ の極は, Weyl の分母 $\Delta(z) = z - z^{-1} = z(1-z^{-2})$ で打ち消すことができて, $\Delta(z)\widetilde{\varphi}(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ となっています. 変数の反転で不変な有理函数 $\widetilde{\varphi}(z)$ について, $\Delta(z)\widetilde{\varphi}(z)$ が Laurent 多項式であれば, $\widetilde{\varphi}(z)$ 自身が Laurent 多項式でなくてはいけません.*2 というわけで, 余境界作用素

$$\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}} : \mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W \longrightarrow \mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W \tag{2.28}$$

が定義されたことになります. ここで $W = \{1, s\}$ は, 変数の反転 $s : z \to z^{-1}$ で生成される群 ($BC_1$ 型の Weyl 群) の積りです. この $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W$ の余核 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W/\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}\mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W$ が, $\Phi(z)$ に付随する「$W$ 不変 de Rham 加群」(1 次の $q$ 差分 de Rham のコホモロジーの $W$ 不変部分) です.

---

*2 Laurent 多項式 $\psi(z) = \Delta(z)\widetilde{\varphi}(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ が $\Delta(z)$ で割り切れるのは, $\psi(z^{-1}) = -\psi(z)$ の下では, $z = z^{-1}$ となる点, 即ち $z = \pm 1$ では $\psi(z)$ の値が 0 となるから. あとは高校数学の因数定理.

この Askey-Wilson の $q$ ベータ積分の場合には, 最初の非自明な余境界 $\nabla^{\Phi}_{sym}(1) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W$ だけ計算すれば, $I(a)$ がパラメータに関して満たすべき $q$ 差分方程式を導き出すことができます. その計算をやってみます.

$$\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1) = z^{-1}\frac{\prod_{j=1}^{4}(1-a_j z)}{1-z^2} + z\frac{\prod_{j=1}^{4}(1-a_j z^{-1})}{1-z^{-2}} \tag{2.29}$$

という訳ですが, 既に注意したように, これは $W$ 不変 (変数の反転 $z \to z^{-1}$ で不変) で, かつ $\Delta(z) = z - z^{-1}$ を乗じたものは正則なので, (通分してみなくても) $\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1)$ 自身が $W$ 不変な Laurent 多項式にであることが分かります. この函数を $|z| > 1$ で Laurent 展開すると

$$\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1) = (1 - a_1a_2a_3a_4)z + (z \text{ 関して } 0 \text{ 次以下の項}) \tag{2.30}$$

$W$ 不変性を考慮すると

$$\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1) = (1 - a_1a_2a_3a_4)(z + z^{-1}) + c_0 \tag{2.31}$$

と表されることが分かります. ここで, $i = 1, 2, 3, 4$ について, $z = a_i$ を代入すると,

$$a_i^{-1}\prod_{1\le j\le 4; j\ne i}(1 - a_ia_j) = (1 - a_1a_2a_3a_4)(a_i + a_i^{-1}) + c_0 \tag{2.32}$$

従って,

$$\begin{aligned} &\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1) \\ &= (1 - a_1a_2a_3a_4)(z + z^{-1} - a_i - a_i^{-1}) + a_i^{-1}\prod_{1\le j\le 4; j\ne i}(1 - a_ia_j) \\ &= -a_i^{-1}(1 - a_1a_2a_3a_4)(1 - a_iz)(1 - a_iz^{-1}) + a_i^{-1}\prod_{1\le j\le 4; j\ne i}(1 - a_ia_j) \end{aligned} \tag{2.33}$$

という表示が得られます. $\langle \nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1)\rangle_{\Phi} = 0$ だったので,

$$(1 - a_1a_2a_3a_4)\,\langle(1 - a_iz^{\pm 1})\rangle_{\Phi} = \prod_{j\ne i}(1 - a_ia_j)\,\langle 1\rangle_{\Phi} \tag{2.34}$$

$T_{q,a_i}\langle 1\rangle_{\Phi} = \langle(1 - a_iz^{\pm 1})\rangle_{\Phi}$ から, これで $I(a) = \langle 1\rangle_{\Phi}$ が $q$ 差分方程式

$$T_{q,a_i}I(a) = \frac{\prod_{j\ne i}(1 - a_ia_j)}{1 - a_1a_2a_3a_4}\,I(a) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.35}$$

を満たすことが導かれました.

大分時間を使ってしまいましたが, やったことは, $q$ 差分 de Rham の考え方を使って, 積分

$$I(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^{\pm 2}; q)_\infty}{\prod_{j=1}^{4}(a_iz^{\pm 1}; q)_\infty}\frac{dz}{z} \tag{2.36}$$

がパラメータ $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ に関して, $q$ 差分方程式 (2.35) を満たすこと示した — ということです. $q$ 差分方程式の具体形が分かったので, この $q$ 差分方程式の解を見繕うことは難しくありません. どんな方法で考えても構いませんが,

$$J(a) = \frac{(a_1a_2a_3a_4; q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_j; q)_\infty} \tag{2.37}$$

が, この $q$ 差分方程式の解の一つであることは, 直接確認できます. 従って, 両者の比 $I(a)/J(a)$ は $q$ シフトで不変 ($q$ 周期的) な函数です. 重要なことは, 積分で書かれた $I(a)$ も $q$ 無限積で書かれた $J(a)$ も, パラメータ空間 $\mathbb{C}^4$ の原点 $a=0$ で正則であることです. 従って, $I(a)/J(a)$ も $a=0$ で正則ですが, $q$ 周期的な正則函数は定数しかありません. というわけで,

$$I(a) = c\,J(a) \quad (c \in \mathbb{C}) \tag{2.38}$$

と表されます. $c$ は $a=(a_1,\ldots,a_4)$ に依存しない定数です. この後は, 定数 $c$ を決定すればいい訳ですが, これも幾つか方法があります. $J(0)=1$ なので,

$$c = I(0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C (z^{\pm 2};q)_\infty \frac{dz}{z}. \tag{2.39}$$

この値を決定するには, 例えば Jacobi の三重積公式を使って

$$\theta(z^2;q) = (z^2;q)_\infty (qz^{-2};q) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{2\binom{k}{2}} z^{2k}. \tag{2.40}$$

$(1-z^2)+(1-z^2)=(1-z^2)(1-z^{-2})$ だから

$$(z^{\pm 2};q)_\infty = \theta(z^2;q)+\theta(z^{-2};q) \tag{2.41}$$

これから $c=\dfrac{2}{(q;q)_\infty}$ が得られる. もう一つは, もっと初等的な方法で, $q$ の平方根 $q^{\frac{1}{2}}$ を選んで,

$$(z^2;q) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k z^2) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{\frac{k}{2}}z)(1+q^{\frac{k}{2}}z) = (\pm z;q)_\infty(\pm q^{\frac{1}{2}}z;q)_\infty \tag{2.42}$$

となることを使うやり方. $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,-1,q^{\frac{1}{2}},-q^{\frac{1}{2}})$ と特殊化すると, 被積分函数が 1 になるので,

$$I(1,-1,q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}) = 1. \tag{2.43}$$

一方

$$\begin{aligned} J(1,-1,q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{(q;q)_\infty}{(-1;q)_\infty(\pm q^{\frac{1}{2}};q)_\infty^2(-q;q)_\infty} = \frac{(q;q)_\infty}{2(\pm q^{\frac{1}{2}};q)_\infty^2(-q;q)_\infty^2} \\ &= \frac{(q;q)_\infty^3}{2(\pm q^{\frac{1}{2}};q)_\infty^2(\pm q;q)_\infty^2} = \frac{(q;q)_\infty^3}{2(q;q)_\infty^2} = \frac{(q;q)_\infty}{2} \end{aligned} \tag{2.44}$$

といった計算で, $c=\dfrac{2}{(q;q)_\infty}$ を導くこともできます.

## 2.4 補間基底の利用

Nassrallah-Rahman のベータ積分や楕円ベータ積分の場合も, Selberg 型の多重積分の場合も, 同様の考え方で積分がパラメータに関して満たすべき $q$ 差分方程式を導くことができます. 要点は, (2.33) のように, $q$ 差分方程式にうまく適合するような $\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(\varphi)$ の表示を構成することです.

$\nabla^{\Phi}_{\rm sym}\varphi(z)$ を良い基底で展開することが必要なのですが, そこで, 第 1 節で説明した補間基底が活躍します. そのあたりの事情を Nassrallah-Rahman のベータ積分の場合で説明してみます.

Nassrallah-Rahman のベータ積分の場合は, 被積分函数は, $a=(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ をパラメータにもつ有理型函数

$$\Phi(z)=\Phi(z;a)=\frac{(z^{\pm 2};q)_\infty(qa_6^{-1}z^{\pm 1};q)_\infty}{\prod_{i=1}^{5}(a_iz^{\pm 1};q)_\infty} \tag{2.45}$$

です. この場合の $b$ 函数は

$$\begin{aligned} b^{\Phi}(z)=\frac{\Phi(qz)}{\Phi(z)}&=-\frac{1}{qz^2}\frac{1-q^{-2}z^{-2}}{1-z^2}\prod_{i=1}^{5}\frac{1-a_iz}{1-a_iq^{-1}z^{-1}}\frac{1-a_6^{-1}z^{-1}}{1-qa_6^{-1}z}\\ &=-\frac{1}{q^2z^4}\frac{1-q^{-2}z^{-2}}{1-z^2}\prod_{i=1}^{6}\frac{1-a_iz}{1-a_iq^{-1}z^{-1}} \end{aligned} \tag{2.46}$$

これに対して,

$$f_+(z)=z^{-2}\frac{\prod_{i=1}^{6}(1-a_iz)}{1-z^2},\quad f_-(z)=f_+(z^{-1})=z^2\frac{\prod_{i=1}^{6}(1-a_iz^{-1})}{1-z^{-2}} \tag{2.47}$$

と定義すれば, $b^{\Phi}(z)$ が

$$b^{\Phi}(z)=-\frac{f_+(z)}{f_-(qz)} \tag{2.48}$$

表されます. Askey-Wilson の場合と比べると, 先頭の $z$ の冪が変わり, 後半の 1 次式の因子が 6 個になりなりました.

$$\nabla^{\Phi}_{\rm sym}\varphi(z)=f_+(z)\varphi(q^{\frac{1}{2}}z)+f_-(z)\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z) \tag{2.49}$$

の定義は前と同じで, $\mathbb{C}$ 線型写像

$$\nabla^{\Phi}_{\rm sym}:\ \ \mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W\to\mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W \tag{2.50}$$

を考えるところまでは同じです. 前と同様に,

$$\nabla^{\Phi}_{\rm sym}(1)=z^{-2}\frac{\prod_{j=1}^{6}(1-a_jz)}{1-z^2}+z^2\frac{\prod_{i=1}^{6}(1-a_jz^{-1})}{1-z^{-2}} \tag{2.51}$$

に注目すると,

$$\begin{aligned} \nabla^{\Phi}_{\rm sym}(1)&=(1-a_1\cdots a_6)z^2+z\ \text{に関して 1 次以下の項}\\ &=(1-a_1\cdots a_6)(z^2+z^{-2})+c_1(z+z^{-1})+c_0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

このままでは, $\mod \nabla^{\Phi}_{\rm sym}\mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W$ で生じる最初の非自明な関係式は 2 次のもので, 結果として得られる $q$ 差分方程式は 2 階です. 今は, $q$ 差分方程式が 1 階になって, 積分が $q$ 無限積で因子化することを想定して, $a_1\cdots a_6=1$ という「平衡条件」を課すことにします. 条件 $a_1\cdots a_6=1$ の下では

$$\nabla^{\Phi}_{\rm sym}(1)=c_1(z+z^{-1})+c_0\in\mathbb{C}[z^{\pm 1}]^W_{\le 1}=\mathcal{H}_{1,1} \tag{2.53}$$

$\mathbb{C}$ 線型空間 $\mathcal{H}_{1,1}$ (前の第 1.2 節の記号で $s=2, n=1$ の場合) は 2 次元です. そこで $i \in \{1,\ldots,5\}$ を一つ決めて, パラメータ $(a_i,a_6)\in(\mathbb{C}^*)^2$ に関する補間基底

$$E_{(1,0)}(a_i,a_6;z)=\frac{e(z,a_6)}{e(a_i,a_6)},\quad E_{(0,1)}(a_i,a_6;z)=\frac{e(z,a_i)}{e(a_6,a_i)}\in\mathcal{H}_{1,1} \tag{2.54}$$

を使って, $\psi(z)=\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1)$ を展開します.

$$\begin{aligned}\psi(z)&=z^{-2}\frac{\prod_{j=1}^{6}(1-a_jz)}{1-z^2}+z^2\frac{\prod_{i=1}^{6}(1-a_jz^{-1})}{1-z^{-2}}\\&=\psi(a_i)E_{(1,0)}(a_i,a_6;z)+\psi(a_6)E_{(0,1)}(a_i,a_6;z)\end{aligned} \tag{2.55}$$

で, 展開係数は

$$\psi(a_i)=a_i^{-2}\prod_{1\le j\le 6;j\ne i}(1-a_ia_j),\quad \psi(a_6)=a_6^{-2}\prod_{j=1}^{5}(1-a_ja_6) \tag{2.56}$$

と決まります. これで

$$\begin{aligned}&\nabla^{\Phi}_{\mathrm{sym}}(1)\\&=a_i^{-2}\prod_{1\le j\le 6;j\ne i}(1-a_ia_j)\cdot\frac{(1-a_6z^{\pm1})}{(1-a_6a_i^{\pm1})}+a_6^{-2}\prod_{1\le j\le 5;}(1-a_ja_6)\cdot\frac{(1-a_iz^{\pm1})}{(1-a_ia_6^{\pm1})}\\&=a_i^{-1}\frac{\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}(1-a_ia_j)}{a_i-a_6}\cdot(1-a_6z^{\pm1})+a_6^{-2}\frac{\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}(1-a_ja_6)}{a_6-a_i}\cdot(1-a_iz^{\pm1})\end{aligned} \tag{2.57}$$

これは, 積分のレベルで

$$a_i^{-1}\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}(1-a_ia_j)\langle(1-a_6z^{\pm1})\rangle_{\Phi}=a_6^{-1}\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}(1-a_ja_6)\langle(1-a_iz^{\pm1})\rangle_{\Phi} \tag{2.58}$$

となることを意味します.

$$T_{q,a_i}\Phi(z)=(1-a_iz^{\pm1})\Phi(z)\quad(i=1,\ldots,5),\quad T_{q,a_6}\Phi(z)=a_6^{-2}(1-a_6z^{\pm1})\Phi(z) \tag{2.59}$$

従って

$$T_{q,a_i}I(a)=\langle(1-a_iz^{\pm1})\rangle_{\Phi}\quad(i=1,\ldots,5),\quad T_{q,a_6}I(a)=a_6^{-2}\langle(1-a_6z^{\pm1})\rangle_{\Phi} \tag{2.60}$$

なので, 上の結果から, $a_1\cdots a_6=1$ の下で, $i=1,\ldots,5$ に対して, $q$ 差分方程式

$$a_i^{-1}\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}(1-a_ia_j)I(\cdots,a_i,\cdots,qa_6)=a_6^{-3}\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}(1-a_ja_6)I(\cdots,qa_i,\cdots,a_6) \tag{2.61}$$

が成立することが分かります. ここで, $a_6$ を $q^{-1}a_6$ に置き換えると, $a_1\cdots a_6=q$ の下での $q$ 差分方程式

$$\begin{aligned}I(\cdots,qa_i,\cdots,q^{-1}a_6)&=\frac{a_6^3}{q^3a_i}\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}\frac{1-a_ia_j}{1-q^{-1}a_ja_6}I(a_1,\ldots,a_6)\\&=\prod_{1\le j\le 5;j\ne i}\frac{1-a_ia_j}{1-q/a_ja_6}I(a_1,\ldots,a_6)\quad(i=1,\ldots,5)\end{aligned} \tag{2.62}$$

が得られます．一方

$$J(a)=\frac{\prod_{i=1}^{5}(q/a_ia_6;q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 5}(a_ia_j;q)_\infty} \tag{2.63}$$

も同じ $q$ 差分方程式を満たす訳ですが, $a_6=1/a_1\cdots a_5$ として, 両者を $a_1,\ldots,a_5$ の函数をみると, $(a_1,\ldots,a_5)=(0,\ldots,0)$ で正則．従って $I(a)=cJ(a)$ と表される．この状態で $a_5=0$ とすると Askey-Wilson の場合になるので, $c=\dfrac{2}{(q;q)_\infty}$ は共通になっています．

# 3 Selberg 型の $q$ 超幾何積分と楕円超幾何積分

## 3.1 $q$ Selberg 積分と楕円 Selberg 積分 ($BC_n$ 型)

残り時間も少なくなってきたので, この辺りで, 多重積分に移ります．

ベータ積分の多重積分版で最も基本的なのは, 次の **Selberg 積分** (1942) です．

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{i=1}^{n}z_i^{\alpha-1}(1-z_i)^{\beta-1}\prod_{1\le i<j\le n}|z_i-z_j|^{2\gamma}\,dz_1\cdots dz_n\\ =\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+(j-1)\gamma)\,\Gamma(\beta+(j-1)\gamma)\,\Gamma(j\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-2)\gamma)\,\Gamma(\gamma)}\end{aligned} \tag{3.1}$$

被積分函数に差積の冪が含まれていることが, この種の積分の特徴です．$\gamma=0$ のときは, 1 変数の積分に分解してベータ函数の $n$ 乗になる訳ですが, $\gamma$ が一般の場合にも, 差積の冪のパラメータがガンマ函数の変数にうまく入り込んで, 積分値が因子化してしまうことが, この積分公式の面白いところだと思います．この積分公式では, 被積分函数に各変数 $z_i$ の 1 次式の冪のベータ因子 $z_i^{\alpha-1}(1-z_i)^{\beta-1}$ が含まれていますが, この 1 次式の冪の因子が 3 個以上になると, **Selberg 型超幾何積分**と呼ぶべきものになります．この種の積分には様々な拡張がありますが, ここでは, Selberg 型の $q$ 超幾何積分と楕円超幾何積分について説明します．歴史的背景や参考文献については, [4] に書いたので, そちらを参考にして下さい．

以下では $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を $n$ 次元代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系, $t\in\mathbb{C}^*$ と $a=(a_1,\ldots,a_m)\in(\mathbb{C}^*)^m$ をパラメータとします．$t$ が Selberg 積分での差積の冪のパラメータに, $a_k$ が変数毎の 1 次積の冪の因子のパラメータに対応します．前節で議論した Askey-Wilson の $q$ ベータ積分の多重積分版としては, 次の **Gustafson の積分公式** ($BC_n$ 型, 1990) が知られています．

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{C^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{(z_i^{\pm2};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{4}(a_kz_i^{\pm1};q)_\infty}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};q)_\infty}{(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};q)_\infty}\,\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n}\\ =\frac{2^nn!}{(q;q)_\infty^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{(t;q)_\infty}{(t^i;q)_\infty}\frac{(a_1a_2a_3a_4t^{n+i-2};q)_\infty}{\prod_{1\le k<l\le 4}(t^{i-1}a_ka_l;q)_\infty}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

$(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};q)_\infty$ と書いたのは, $\pm$ の符号の組合せに対応する $q$ 無限積 4 個の積を表す略記法です．Askey-Wilson のベータ積分の被積分函数が, $q$ 直交多項式である Askey-Wilson 多項式

の重み函数であったのと同じ意味で, この積分の被積分函数は $BC_n$ 型の $q$ 直交多項式である Koornwinder 多項式 ($C^\vee C$ 型の Macdonald 多項式) の重み函数になっています. この $q$ Selberg 積分については, Nassrallah-Rahman $q$ ベータ積分の多重積分版も知られていて, 同じく Gustafson によるものです: パラメータが平衡条件 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6t^{2n-2}=q$ を満たすとき,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{C^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{(z_i^{\pm2};q)_\infty(qa_6^{-1}z_i^{\pm1};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{5}(a_kz_i^{\pm1};q)_\infty}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};q)_\infty}{(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};q)_\infty}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n}\\ =\frac{2^nn!}{(q;q)_\infty^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{(t;q)_\infty}{(t^i;q)_\infty}\frac{\prod_{k=1}^{5}(t^{1-i}q/a_6a_k;q)_\infty}{\prod_{1\le k<l\le5}(t^{i-1}a_ka_l;q)_\infty}\right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

この Nassrallah-Rahman 型の $q$ Selberg 積分の 楕円版が van Diejen-Spiridonov の**楕円 Selberg 積分** (2001) です: パラメータの平衡条件 $a_1\cdots a_6t^{2n-2}=pq$ の下で,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{C^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{6}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n}\\ =\frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(t^i;p,q)}{\Gamma(t;p,q)}\prod_{1\le k<\ell\le6}\Gamma(t^{i-1}a_ka_\ell;p,q)\right)\end{aligned}\tag{3.4}$$

楕円ガンマ函数 $\Gamma(z;p,q)$ は概ね $q$ 無限積の逆数 $(z;q)_\infty^{-1}$ に対応するので, $q$ Selberg 積分と楕円 Selberg 積分では, 分子と分母が反転して見えるので, 注意して下さい. この楕円 Selberg 積分でパラメータの $a_6$ を $pa_6$ に置き換えた後で $p\to0$ の極限をとると, Nassrallah-Rahman 版の $q$ Selberg 積分に移行します.

ここに掲げた $q$ Selberg 積分と楕円 Selberg 積分の積分公式も, 第 2 節で説明した $q$ 差分 de Rham の方法と, 第 1 節で説明した Langrange 型補間函数を用いて証明することができます. 詳細を説明する時間はありませんが, 詳しくは [2], [4] を参照してください.

## 3.2 Selberg 型の $q$ 超幾何積分と楕円超幾何積分 ($BC_n$ 型)

$z=(z_1,\ldots,z_n)$ を $n$ 次元代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系, $t\in\mathbb{C}^*$ と $a=(a_1,\ldots,a_m)$ をパラメータとして次の有理型函数を考えます.

$$\Phi(z;a)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}\tag{3.5}$$

今は設定を明確にするために, $|a_k|<1$ $(k=1,\ldots,m)$ と仮定し, $BC_n$ 型の**楕円超幾何積分**として $n$ 次元実トーラス $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n=\{|z_1|=\cdots=|z_n|=1\}$ 上の積分

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n}\Phi(z;a)\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n}\tag{3.6}$$

を考えます. $m=6$ で平衡条件 $a_1\cdots a_6t^{2n-2}=pq$ を課したものが, van Diejen-Spiridonov の楕円 Selberg 積分の設定です. この場合は, 積分がパラメータに関して 1 階の $q$ 差分方程式を満

たし, それに対応して, 楕円ガンマ函数を用いた明示公式が存在する訳ですが, $m$ が一般になると, パラメータに関する $q$ 差分方程式は高階の「超幾何方程式」(階数は $q$ 差分 de Rham 加群の次元) となります. その $q$ 差分方程式を具体的に書き下す方法もありますが, 方程式は非常に複雑なもので, 取り扱いは容易ではありません. 以下では, その方程式の解の基本行列を与えるような, 楕円超幾何積分の行列と, その行列式についての最近の結果 [3] を紹介して終わりにします.

$m$ は偶数と仮定し, $m = 2r + 4$ $(r = 1, 2, \ldots)$ と表しておきます. $r$ 次元の代数的トーラスの一般の点 $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_1, \ldots, y_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ をとり, $p$ に関して擬周期的な補間基底

$$\mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n} = \bigoplus_{\mu \in Z_{r,n}} \mathbb{C} E_\mu(x; z|p) \tag{3.7}$$

と $q$ に関して擬周期的な補間基底

$$\mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n} = \bigoplus_{\nu \in Z_{r,n}} \mathbb{C} E_\nu(y; z|q) \tag{3.8}$$

の 2 種類を使って, 次のような楕円超幾何積分を考えます.

$$K_{\mu\nu}(a; x, y) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\mathbb{T}^n_{\mathbb{R}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cocycle}}}{E_\mu(x; z|p)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{E_\nu(y; z|q)} \Phi(z; a) \frac{dz}{z} \quad (\mu, \nu \in Z_{r,n}) \tag{3.9}$$

$q$ 差分 de Rham の観点から見れば, $p$ に関して擬周期的な $E_\nu(x; z|p)$ がコサイクル (コホモロジーの基底), $q$ に関して擬周期的な $E_\nu(y; z|q)$ がサイクル (ホモロジーの基底) に相当するものです. この $\mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n}$, $\mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n}$ の次元は $\binom{n+r-1}{n}$ で, これが $q$ 差分方程式の階数になります.

一般の $BC_n$ の Selberg 型楕円超幾何積分に対して行列式公式を確立すること — は, 伊藤雅彦さんとの共同研究の主たる目標の一つでしたが, 楕円補間函数についての理解が進んだおかげで, 行列 $(K_{\mu\nu}(a; x, y))_{\mu,\nu \in Z_{r,n}}$ の行列式の明示公式得ることができました. 時間が迫っているので, 答えを書いて終わりにしたいと思います. 結構複雑ですが, パラメータに対する平衡条件 $a_1 \cdots a_m t^{2n-2} = pq$ の下で,

$$\begin{aligned}
&\det(K_{\mu\nu}(a; x, y))_{\mu,\nu \in Z_{r,n}} \\
&= \left( \frac{2^n n!}{(p;p)^n_\infty (q;q)^n_\infty} \right)^{\binom{n+r-1}{n}} \\
&\quad \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\left( \left( \dfrac{\Gamma(t^{n-i+1}; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \right)^r \displaystyle\prod_{1 \le k < \ell \le 2r+4} \Gamma(t^{n-i} a_k a_\ell; p, q) \right)^{\binom{i+r-2}{i-1}}}{\left( \displaystyle\prod_{j=0}^{n-i} \prod_{1 \le k < \ell \le r} e(t^j x_k, t^{n-i-j} x_\ell | p) e(t^j y_k, t^{n-i-j} y_\ell | q) \right)^{\binom{i+r-3}{i-1}}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

この行列式公式には, 小行列式の行列式についての Sylvester の公式に相通じるものがあります. $r = 1$, $m = 6$ の場合が, van Diejen-Spiridonov の楕円 Selberg 積分の積分公式です. 然るべく

$p \to 0$ の極限をとると, Nassrallah-Rahman 型の $q$ 超幾何積分や Askey-Wilson 型の $q$ 超幾何積分の行列式公式を導くことも可能です. 詳しい議論については，伊藤・野海 [3] を参照して下さい. これでお終いにします. どうも有難うございました.

## 参考文献


[1] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type $BC_n$, Adv. in Math. **229**(2016), 361–380. DOI: 10.1016/j.aim.2016.05.016 (arXiv1506.07267, 17 pages)

[2] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the $BC_n$ elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 689–703. DOI 10.1090/proc/13234 (arXiv:1504.07317, 15 pages)

[3] M. Ito and M. Noumi: A determinant formula associated with the elliptic hypergeometric integrals of type $BC_n$, J. Math. Phys. **60**, 071705 (2019), DOI: 10.1063/1.5094116 (31 pages) (arXiv:1902.10533, 42 pages)

[4] 伊藤雅彦・野海 正俊 :「楕円超幾何積分と楕円補間函数– $q$ Selberg 積分から楕円 Selberg 積分へ –」数理解析研究所講究録 **2071**(2018), 40–65.