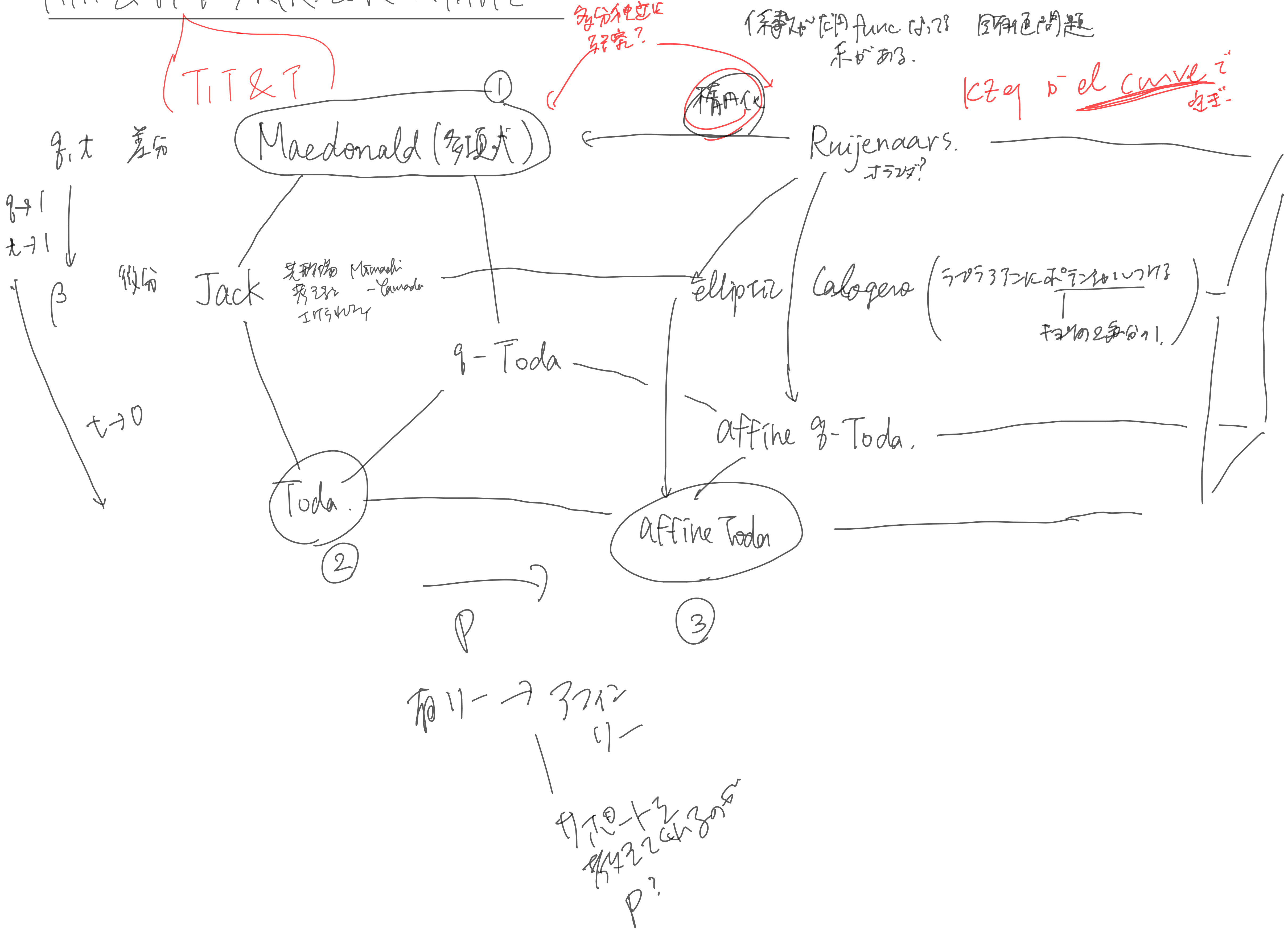
M, M & M から R, R & R へ向けて



Macdonald 作用素 A_1.　変数 x_1, x_2, パラメータ q, t.

$$D = \frac{tx_1 - x_2}{x_1 - x_2} T_{q,x_1} + \frac{tx_1 - x_2}{x_1 - x_2} T_{q,x_2}.$$

$$T_{q,x_i} f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, qx_i, \cdots, x_n)$$

i 番目だけ q 倍.

$$T_{q,x_i} = q^{x_i \frac{\partial}{\partial x_i}}.$$

オイラー作用素の q べき.

これを次の空間の上で対角化する。

固有値問題
とくってことかい?

(対称な対称式上
で対角化できる。

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \mathbb{C}[[x_2/x_1]]$$

$$T_{q,x_1} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} = \underline{\underline{q^{\lambda_1}}} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}$$

$$T_{q,x_2} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} = \underline{\underline{q^{\lambda_2}}} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}.$$

$$f \in x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \mathbb{C}[[x_2/x_1]]$$

$$f(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2 | q, t) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_1, \lambda_2 | q, t)(x_2/x_1)^n.$$

と仮定して、

$$Df = \varepsilon f \qquad f \in x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \mathbb{C}[[x_2/x_1]]$$

を解く。

Macdonald
作用素.

(戸田の方に…) これは

x_2/x_1 のべきに てんかい

$$\underbrace{\left(q^{\lambda_1} t \, \frac{1 - x_2/tx_1}{1 - x_2/x_1} T_{q,x_1} + q^{\lambda_2} \frac{1 - t x_2/x_1}{1 - x_2/x_1} T_{q,x_2} \right)}_{\text{Macdonald 作用素}} \sum_{n \geq 0} c_n \left(x_2/x_1 \right)^n$$

$$= \left(q^{\lambda_1} t + q^{\lambda_2} \right) \sum_{n \geq 0} c_n \left(x_2/x_1 \right)^n$$

2変数のとき A_1

A_1

$$c_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(1-q^k t)(1-q^k t\, s_2/s_1)}{(1-q^k q)(1-q^k q\, s_2/s_1)} \right) (q/t)^n$$

ここに $\begin{cases} s_1 = q^{\lambda_1} t \\ s_2 = q^{\lambda_2} t \end{cases}$ //

行列式がない

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$

!ぱうえるだ

$\Longrightarrow$ 

行列式になる

目標

- A_2, A_3, ..., A_n. ← できている。
- B_n ← できていない。 戸田の極限たち
- affine version. 組みあわせ的構造が見えるようになった。

$A_n^{(1)}$ で よそうついた

Mac

論 [illegible]になきてい!
[illegible]

ランク上がったらどうなるか?

<u>記号</u> $(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a).$

$(a;q)_n = (a)_n.$

$$\boxed{C_n = \frac{(t)_n(ts_2/s_1)_n}{(q)_n(qs_2/s_1)_n}\left(q/t\right)^n.}$$

A_{n-1} マクドナルド 作用素

$$D = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}.$$

BC型 Koorn なんちゃら

言われた

A_2 空間

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \sum_{m,n \geq 0} C_{m,n} (x_2/x_1)^m (x_3/x_2)^n \in x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \underbrace{\mathbb{C}[[x_2/x_1, x_3/x_2]]}$$

A_2型の Verma加群の

指標が入っている

root系 $\alpha_1=(1,0,0)$

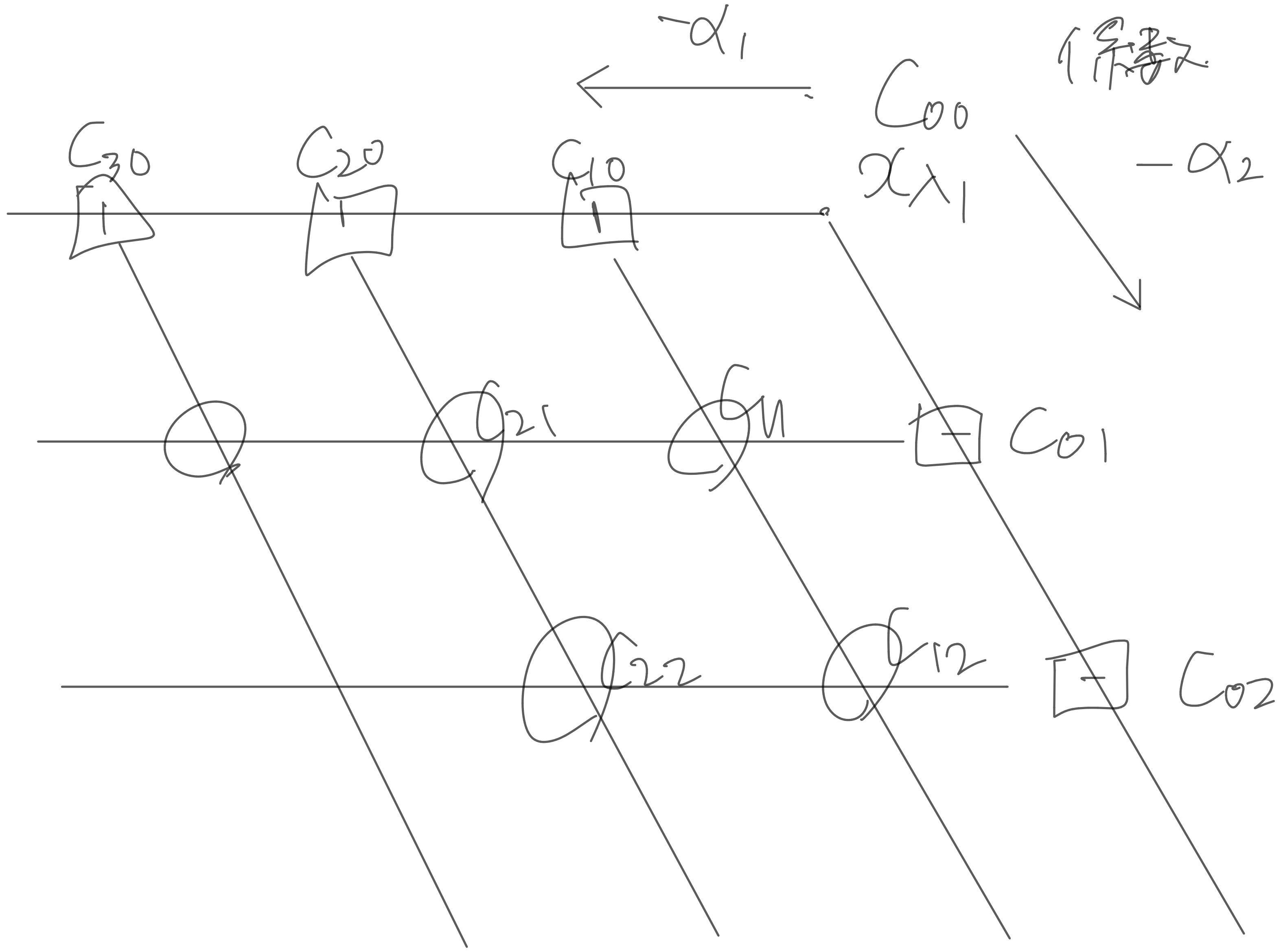
$\alpha_2=(0,1,-1)$

$e^{-\alpha_1} \longrightarrow x_2/x_1$

$e^{-\alpha_2} \longrightarrow x_3/x_2.$

$$\boxed{Df=(S_1+S_2+S_3)f.}$$

$$\begin{cases} S_1=q^{\lambda_1}t^2 \\ S_2=q^{\lambda_2}t \\ S_3=q^{\lambda_3}. \end{cases}$$



C_{min} を求めて

書き下せ!

1993 か 4

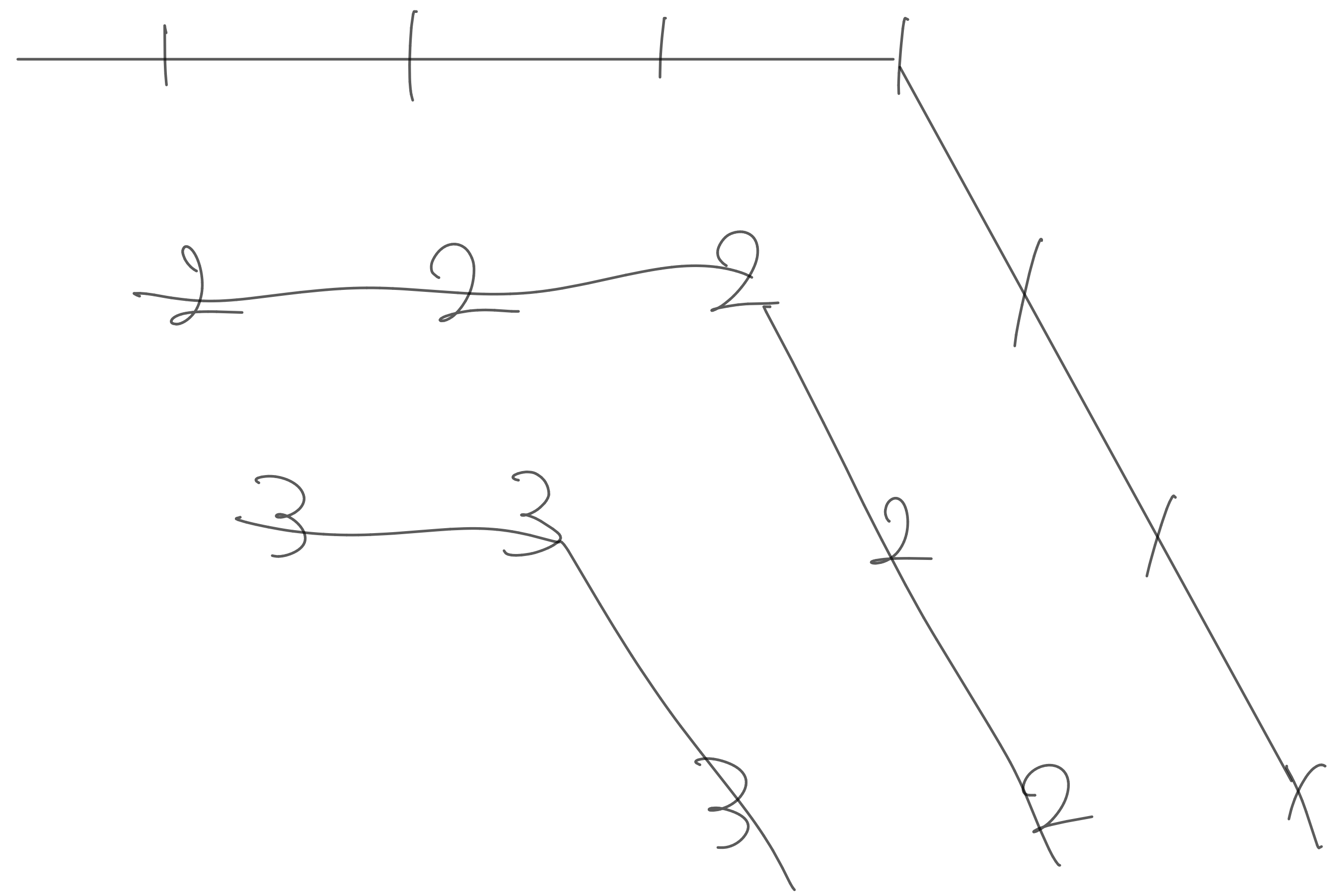
←

内に入るとどんどん
良くなる.
クラどころじゃなくなる

$q = t$ で
{
2つが固有かんすう
or
$3/2$-3かんすう
となる

$$f = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \frac{1}{(1 - x_2/x_1)(1 - x_3/x_1)(1 - x_2/x_1)}$$

S: generic で
となる.



$$\begin{array}{ccc} f \quad \begin{matrix} q, t \\ s_1 s_2 s_3 \end{matrix} & \xrightarrow{q = t} & \text{Verma} \\ \downarrow \text{ヤング図} & & \not\parallel \\ P_\lambda & \xrightarrow{q \neq t} & A_\lambda \end{array}$$

$$\frac{1}{(1-x_2/x_1)(1-x_3/x_1)(1-x_3/x_2)} = \boxed{\sum_{m,n\geq 0} (x_2/x_1)^m (x_3/x_2)^n} \sum_{k=0}^{\infty} (x_3/x_1)^k$$

$$= \sum_{m,n\geq 0} C_{m,n} (x_2/x_1)^m (x_3/x_2)^n.$$

記号

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, z\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (q)_n} z^n $$

A_1

$$ f = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} t, \ ts_2/s_1 \\ qs_2/s_1 \end{matrix}; q, qx_1/tx_2\right) $$

A_2やと

ためしに。

A1の結果から固有関数を予想

予想?

$$f^{A_2} \overset{?}{=} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \prod_{1\le i<j\le 3} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} t, \ t s_j/s_i \\ q s_j/s_i \end{matrix} ; q, q x_j/t x_i \right)$$

命題 (予想)

$q=t$

$$f^{A_2} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)_k (q/t)_k (q/t)_k (q/t)_k}{(q)_k (q s_2/s_1)_k (q s_3/s_1)_k (q s_3/s_2)_k} (q s_3/s_1)^k \times (x_3/x_1)^k \times$$

$$\times \prod_{1\le i<j\le 3} \left(\begin{matrix} q^k t, \ t s_j/s_i \\ q^k q s_j/s_i \end{matrix} ; q, q x_j/t x_i \right)$$

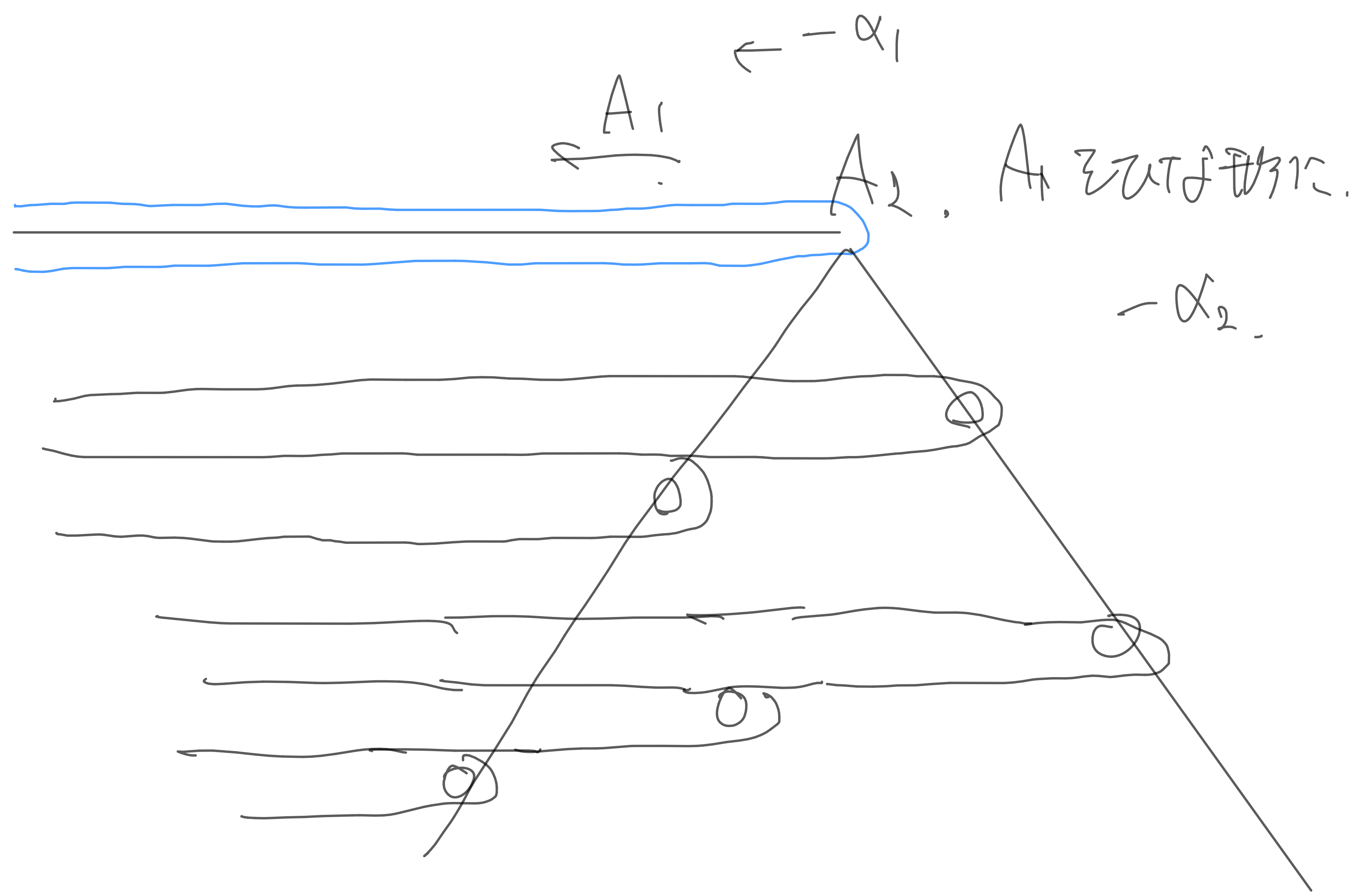
“あわじ ほくだん”!!

よい点

$s \leftrightarrow x$ の duality がそのまま見える。

悪い点　$A_3, A_4, \cdots$ わからない。

復習.



残りが因数分解される.

定義

$$C\begin{pmatrix}\theta_{12} & \theta_{13} \\ & \theta_{23}\end{pmatrix} \Big| s \Big| q, t \Big) \qquad \theta_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$= \frac{(t)_{\theta_{12}} \left(q^{-\theta_{23}+\theta_{13}} t s_2/s_1\right)}{(q)_{\theta_{12}} \left(q^{-\theta_{23}+\theta_{13}} q s_2/s_1\right)} (q/t)^{\theta_{12}}$$

$$\times \frac{(t)_{\theta_{13}} (t s_3/s_1)_{\theta_{13}}}{(q)_{\theta_{13}} (q s_3/s_1)_{\theta_{13}}} \frac{(t s_2/s_1)_{\theta_{13}} \left(q^{\theta_{23}-\theta_{13}} t s_1/s_2\right)_{\theta_{13}}}{(q s_2/s_1)_{\theta_{13}} \left(q^{\theta_{23}-\theta_{13}} q s_1/s_2\right)_{\theta_{13}}} (q/t)^{2\theta_{13}}$$

$$\times \frac{(t)_{\theta_{23}} (t s_3/s_2)_{\theta_{23}}}{(q)_{\theta_{23}} (q s_3/s_2)_{\theta_{23}}} (q/t)^{\theta_{23}}.$$

命題 Ver. 2.

$$f^{A_2} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \sum_{\substack{\theta_{12},\theta_{13},\\ \theta_{23} \geq 0}} C^{A_2}\begin{pmatrix} \theta_{12}\ \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} \left| s \right| q, t \Big) (x_3/x_1)^{\theta_{12}} (x_3/x_1)^{\theta_{13}} (x_3/x_2)^{\theta_{23}}$$

$||$

3重和

$_{14}W_{13}$ の変換公式
(well-poised.)

もうひとつ.

マクドナルドpoly　@京楽[illegible]

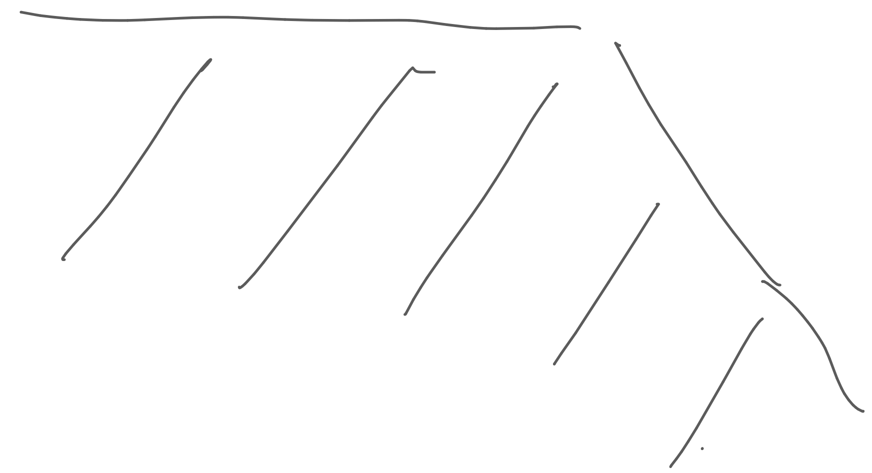
$$C^{\text{京楽}}\begin{pmatrix}\theta_{12} & \theta_{13} \\ & \theta_{23}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(t)_{\theta_{13}}\,(q^{\theta_{12}+\theta_{13}}\,t^{2}s_3/s_1)_{\theta_{13}}}{(q)_{\theta_{13}}\,(q^{\theta_{12}+\theta_{13}}\,q\,\underline{\underline{t}}\,s_3/s_1)_{\theta_{13}}}$$

$$\times\ \frac{(t)_{\theta_{12}}}{(q)_{\theta_{12}}}\ \frac{(t s_2/s_1)_{\theta_{12}}}{(q s_2/s_1)_{\theta_{12}}}\left(q/t\right)^{\theta_{12}}.$$

$$\times\ \frac{(t)_{\theta_{23}}}{(q)_{\theta_{23}}}\ \frac{(t s_3/s_2)_{\theta_{23}}}{(q s_3/s_2)_{\theta_{23}}}\times\boxed{\frac{(q s_3/s_1)_{\theta_{12}+\theta_{23}}\,(t s_3/s_1)_{\theta_{12}}\,(t s_3/s_1)_{\theta_{23}}}{(q s_3/s_1)_{\theta_{12}}\,(q s_3/s_1)_{\theta_{23}}\,(t s_3/s_1)_{\theta_{12}+\theta_{23}}}}$$

$\alpha_1+\alpha_2$



戸田極限 $t \to 0$

$$C\begin{pmatrix} \theta_{12} & & \theta_{13} \\ & \theta_{23} & \end{pmatrix} \Bigg| s \Bigg| q, t \Bigg) \qquad \theta_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$(0)=1.$

$$= \frac{\cancel{(t)_{\theta_{12}}}\,\left(\cancel{q^{-\theta_{23}+\theta_{13}}\, t\, s_2/s_1}\right)}{(q)_{\theta_{12}}\left(q^{-\theta_{23}+\theta_{13}}\, q\, s_2/s_1\right)}\left(q/t\right)^{\theta_{12}}$$

$$\times \frac{\cancel{(t)_{\theta_{13}}}\,\cancel{(t s_3/s_1)_{\theta_{13}}}}{(q)_{\theta_{13}}(q s_3/s_1)_{\theta_{13}}} \; \frac{\cancel{(t s_2/s_1)_{\theta_{13}}}\left(\cancel{q^{\theta_{23}-\theta_{13}}\, t s_1/s_2}\right)_{\theta_{13}}}{(q s_2/s_1)_{\theta_{13}}\left(q^{\theta_{23}-\theta_{13}}\, q\, s_1/s_2\right)_{\theta_{13}}} \; (q/t)^{2\theta_{13}}$$

$$\times \frac{\cancel{(t)_{\theta_{23}}}\,\cancel{(t s_3/s_2)_{\theta_{23}}}}{(q)_{\theta_{23}}(q s_3/s_2)_{\theta_{23}}} \left(q/t\right)^{\theta_{23}}.$$

2変数に追い込む.

戸田極限 $t \to 0$.

Macd作用素.

$\underline{A_1}$.

$$D \to S_1 \frac{1 - tx_2/tx_1}{1 - tx_2/x_1} T_1 + S_2 \frac{1 - tx_2/x_1}{1 - tx_2/x_1} T_2.$$

$t \to 0$

$(x_1, x_2) \to (x_1, tx_2)$

$$\xrightarrow{t \to 0} \boxed{S_1 (1 - x_2/x_1) T_1 + S_2 T_2.}$$

q-Toda差分作用素

定義

$$D^{A_{n-1}\ q\text{-Toda}} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \left(1 - x_{i+1}/x_i\right) T_{q,x_i} + s_n T_{q,x_n}.$$

A_{n-1}の公式

$$D^{B_n\ q\text{-Toda}} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \left(1 - x_{i+1}/x_i\right) T_{q,x_i} + s_n \left(1 - 1/x_n\right) T_{q,x_n} + s_1^{-1} T_{q,x_1}^{-1} + \sum_{i=2}^{n} s_i^{-1} \left(1 - x_i/x_{i-1}\right) T_{q,x_i}^{-1}$$

B_nの予想

(with 星野类)

定義

$$C^{A_{n-1}\,\mathrm{Toda}} = \prod_{k=2}^{n} \prod_{1 \leq i \leq j \leq k-1} \frac{q^{\theta_{ik}}}{\left(q^{\sum_{a=k+1}^{n}(\theta_{i,a}-\theta_{j+1,a})} q\, s_{j+1}/s_i\right)_{\theta_{ik}}} \frac{1}{\left(q^{\theta_{jk}-\theta_{ik}-\sum^{n}(\theta_{ia}-\theta_{ja})} q\, s_i/s_j\right)_{\theta_{ik}}}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{12} & \theta_{13} & \cdots & \theta_{1n} \\ & \theta_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \theta_{n-1,n} \end{pmatrix} \qquad \frac{n(n-1)}{2} コ. \qquad \left(\begin{array}{l} \theta_{ij} \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad i>j \\ \Rightarrow \theta_{ij} = 0 \end{array}\right)$$

命題 $f^{A_{n-1}\, q\text{-Toda}} := \sum_{\theta} C^{A_{n-1}\, q\text{-Toda}}(\theta|s) \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j/x_i)^{\theta_{ij}}$ とすると.

$$D^{A_{n-1}\, q\text{-Toda}} f^{A_{n-1}\, q\text{-Toda}} = (s_1 + \cdots + s_n) f^{A_{n-1}\, q\text{-Toda}}$$ が成立.

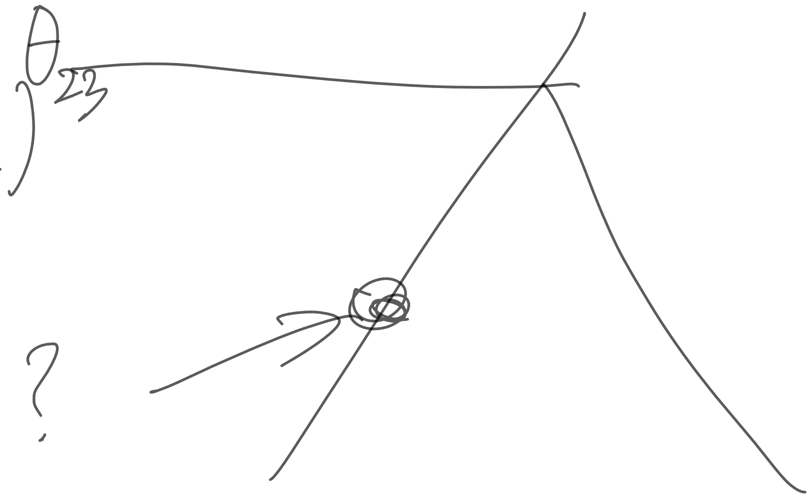
証明 (野海・S) で $t \to 0$ とする. or. Laumon sp. の上で幾何学をやる.

Brave ?, Finke ? たち

注 Macdonald version では幾何学的な説明がまだない(?)

A_2

$$\sum c(\theta)\,(x_2/x_1)^{\theta_{12}}(x_3/x_1)^{\theta_{13}}(x_3/x_2)^{\theta_{23}}$$



$$= 1 + c\begin{pmatrix}1 & 0\\ & 0\end{pmatrix}(x_2/x_1)$$

$$+\, c\begin{pmatrix}0 & 0\\ & 1\end{pmatrix}(x_3/x_2)$$

$$+\, \underbrace{\left(c\begin{pmatrix}1 & 0\\ & 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix}\right)}_{\text{因数分解}}(x_3/x_1)$$

<u>定義</u>

$$e^{B_n/A_{n-1}}(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{q^{(n-k+1)\theta_{12}}}{(q)_{\theta_k}\,(q/\underline{\underline{s_k^2}})_{\theta_k}}$$

"s"

分配係数に
相当する

ラングランズ
duality

内?

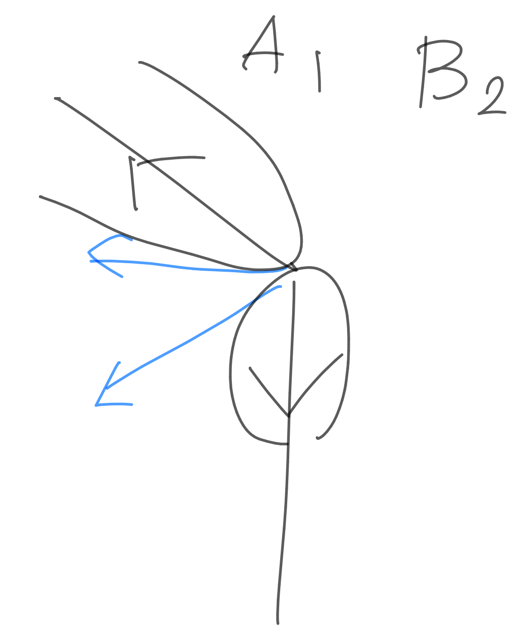
$$\times\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{(qs_j/s_i)_{\theta_k}\,(q^{\theta_j-\theta_i}s_i/s_j)_{\theta_{12}}}\times\boxed{\frac{(q/s_is_j)_{\theta_i+\theta_j}}{(q/s_is_j)_{\theta_i}\,(q/s_is_j)_{\theta_j}}}$$

予想.

$$f^{B_n\ q\text{-Toda}} = \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n \ge 0} e^{B_n/A_{n-1}}(\theta) \prod_{i=1}^{n} \left(1/x_i\right)^{\theta_i} \cdot f^{A_{n-1}\ q\text{-Toda}}(x_1,\dots,x_n \mid q^{-\theta_1}s_1,\dots,q^{-\theta_n}s_n \mid q)$$

とおくと,

$$D^{B_n\text{-}q\text{-Toda}} f^{B_n\text{-}q\text{-Toda}} = \sum_{i=1}^{n} (s_i + s_i^{-1}) f^{B_n\text{-}q\text{-Toda}}.$$



問 なにか(幾何学的な?)考え方をみつけて証明せよ.

注. C_n, D_n を A_{n-1} で分岐 → むずかしい.

Lie alg $\mathfrak{g}$ Whittaker 関数.

Bump. 合流型超幾何の
リー環の

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, e, f, h

$[e, f] = h$

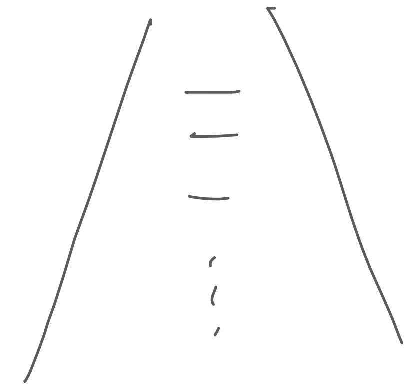
$[h, e] = 2e$

$[h, f] = -2f$.

Verma module. ←ここで考えるならみれる. 有限次元となる.

$h|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$. $\langle\lambda|h = \lambda\langle\lambda|$

$|\lambda\rangle$



$e|\lambda\rangle = 0$ $\langle\lambda|f = 0$.

$e|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$. $\langle\lambda|f = \mu\langle\mu|$.

$$|\mu\rangle = |\lambda\rangle + c_1 f|\lambda\rangle + c_2 f^2|\lambda\rangle + \cdots$$

記号.

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

$$h f^n|\lambda\rangle = (\lambda-2n) f^n|\lambda\rangle.$$

$$e f^n|\lambda\rangle = n(\lambda-n+1) f^{n-1}|\lambda\rangle.$$

$$e^n f^n|\lambda\rangle = n!\,(\lambda-n+1)_n|\lambda\rangle.$$

戸田考えるのには不要

Casimir $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$

$$= 2fe + \frac{1}{2}h^2 + h.$$

$$\langle\mu|C|\mu\rangle = \frac{\lambda(\lambda+2)}{2}\langle\mu|\mu\rangle.$$

公式. $e|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$. modified $\overset{?}{\underline{\quad\quad}}$

$$|\mu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!(\lambda-n+1)_n} f^n|\lambda\rangle, \quad \langle\mu| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!(\lambda-n+1)_n} \langle\lambda| e^n$$

定義. (Whittaker 関数).

$$\langle\mu|\mu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n}}{n!(\lambda-n+1)_n}$$

$$\langle \mu | C | \mu \rangle = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \langle \mu | \mu \rangle .$$

$$\parallel$$

$$2\mu^2 \langle \mu | \mu \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n}}{n!\,(\lambda-n+1)_n} \left(\frac{1}{2}(\lambda-2n)^2 + (\lambda-2n) \right)$$

<u>比較</u>

$$0 = \left(2\mu^2 - (\lambda+1)\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{1}{2}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^2 \right) \langle \mu | \mu \rangle .$$ 変形ベッセル.

$\underline{A_2}$

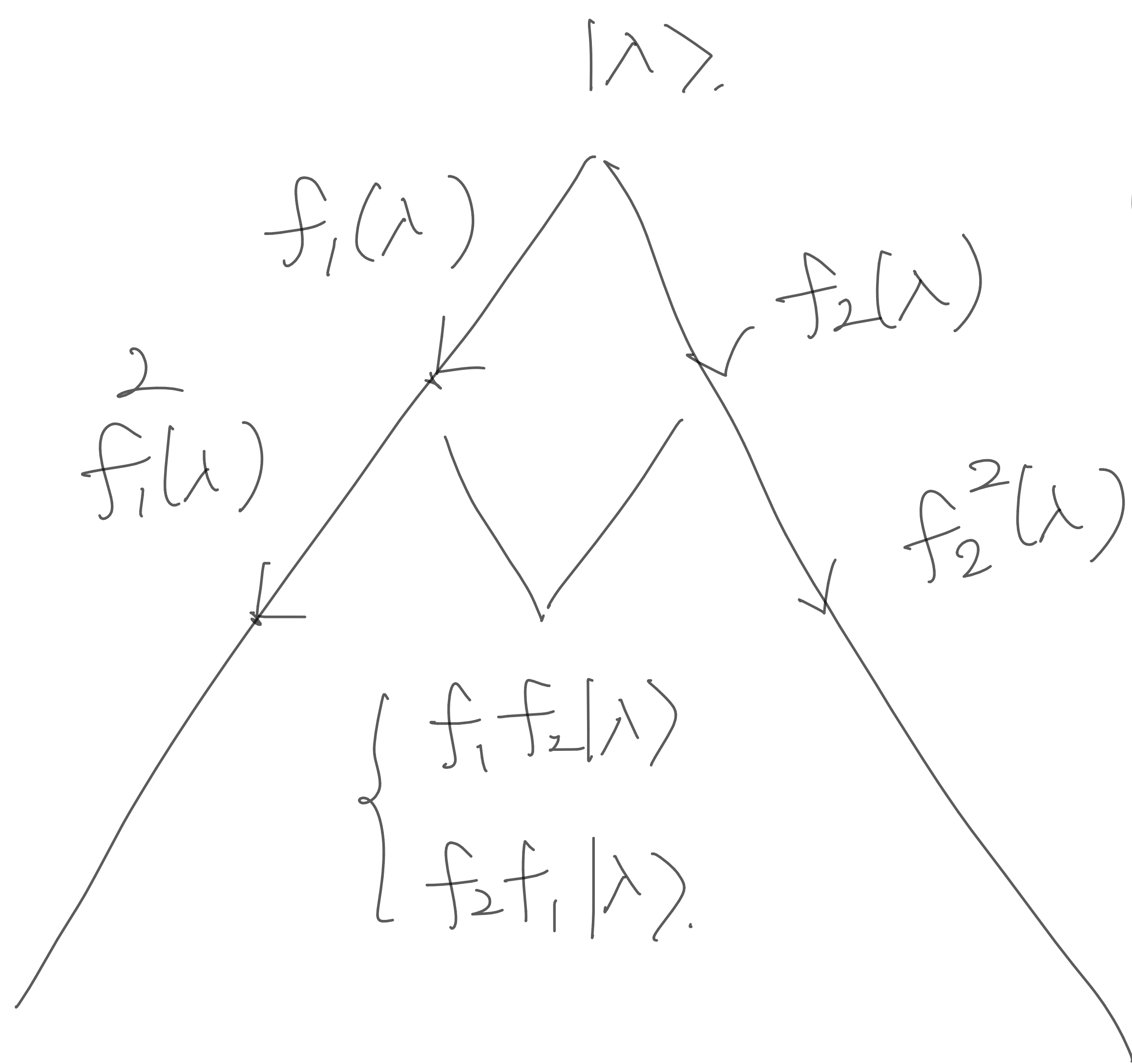
$e_1, e_2, f_1, f_2, h_1, h_2.$

$$[e_i\ f_j] = \delta_{ij} h_i$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j$$

$$[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$$

$$\mathrm{ad}_{e_i}^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0$$



$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

PBW.

$$h_i|\lambda\rangle = \lambda_i|\lambda\rangle.$$

$$e_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle. \quad \text{—}(*)$$

$$\begin{cases} e_1|\mu\rangle = \mu_1|\mu\rangle. \\ e_2|\mu\rangle = \mu_2|\mu\rangle. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}|\mu\rangle = |\lambda\rangle &+ c_1 f_1|\lambda\rangle + c_{11} f_1 f_1|\lambda\rangle. \quad + \\ &+ c_2 f_2|\lambda\rangle + c_{22} f_2 f_2|\lambda\rangle \\ &+ c_{12} f_1 f_2|\lambda\rangle \quad + . \\ &+ c_{21} f_2 f_1|\lambda\rangle\end{aligned}$$

データ

$$e_1 f_1 |\lambda\rangle = \lambda_1 |\lambda\rangle.$$

$$e_2 f_2 |\lambda\rangle = \lambda_2 |\lambda\rangle.$$

$$e_1 e_2 f_1 f_1 |\lambda\rangle = 2(\lambda_1 - 1)\lambda_1 |\lambda\rangle.$$

$$e_2 e_2 f_2 f_2 |\lambda\rangle = 2(\lambda_2 - 1)\lambda_2 |\lambda\rangle.$$

$$e_2 e_1 f_1 f_2 |\lambda\rangle = (\lambda_1 + 1)\lambda_2 |\lambda\rangle.$$

$$e_1 e_2 f_1 f_2 |\lambda\rangle = \lambda_1 \lambda_2 |\lambda\rangle.$$

$$e_2 e_1 f_2 f_1 |\lambda\rangle = \lambda_1 \lambda_2 |\lambda\rangle.$$

$$e_1 e_2 f_2 f_1 |\lambda\rangle = (\lambda_2 + 1)\lambda_1 |\lambda\rangle.$$

(＊)を解くと、

$$c_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad c_{11} = \frac{\mu_1^2}{2(\lambda_1 - 1)\lambda_1}, \quad c_{12} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_2(1+\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$c_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad c_{22} = \frac{\mu_2^2}{2(\lambda_2 - 1)}, \quad c_{21} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1(1+\lambda_1+\lambda_2)}$$

Whittaker関数

適当な2次形式がでる.

$$\frac{\mu_1^4}{2(\lambda_1-1)\lambda_1}$$

$$\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}$$

$$\langle \mu | \mu \rangle = \langle \lambda | \lambda \rangle + c_1 c_1 \langle \lambda | e_1 f_1 | \lambda \rangle + c_{11} c_{11} \langle \lambda | e_1 e_1 f_1 f_1 | \lambda \rangle$$

$$\frac{\mu_2^4}{2(\lambda_2-1)\lambda_2}$$

$$+ c_2 c_2 \langle \lambda | e_2 f_2 | \lambda \rangle + c_{22} c_{22} \langle \lambda | e_2 e_2 f_2 f_2 | \lambda \rangle$$

$$\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}$$

$$+ c_{12} c_{12} \langle \lambda | e_2 e_1 f_1 f_2 | \lambda \rangle + c_{21} c_{12} \langle \lambda | e_1 e_2 f_1 f_2 | \lambda \rangle$$

$$+ c_{12} c_{21} \langle \lambda | e_2 e_1 f_2 f_1 | \lambda \rangle + c_{21} c_{21} \langle \lambda | e_1 e_2 f_2 f_1 | \lambda \rangle$$

Bump.

$$\frac{\mu_1^2 \mu_2^2 (\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (1+\lambda_1+\lambda_2)}$$

$\underline{A_1^{(1)}}$ $e_0, e_1, f_0, f_1, h_0, h_1.$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2$ $\leftarrow h_0 + h_1 \leftarrow$ Center.

$$e_0 |\mu\rangle = \mu_0 |\mu\rangle.$$

$$e_1 |\mu\rangle = \mu_1 |\mu\rangle.$$

このとき,

$$\langle \mu | \mu \rangle = 1 + \left(\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_1^4}{2(\lambda_1 - 1)\lambda_1} + \frac{\mu_0^2}{\lambda_0} + \frac{\mu_0^4}{2(\lambda_0 - 1)\lambda_0} \right) + \frac{(\lambda_0 + \lambda_1)\mu_0^2 \mu_1^2}{\lambda_0 \lambda_1 (\underbrace{2 + \lambda_0 + \lambda_1}_{\parallel \atop 0 \iff \text{central level.}})} + \cdots$$

$\boxed{\text{目標}}$ このq-versionを方程式でつかまえたい。

定義 ラプラシアン $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$ （N：粒子数？）

さぼーん
さようなら

← Vandermondeぽいやつ

$$\hat{J}^{gl_N}(K) = \boxed{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{(p q x_{i+1}/x_i ; p)_\infty}} \, q^{\frac{1}{2}\Delta} \, \underline{K^{p\frac{\partial}{\partial p}}}$$

K 定数

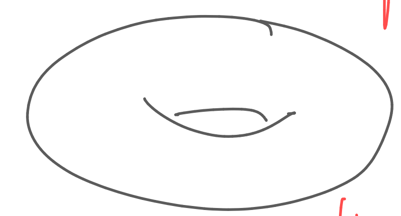
と定める。ただし $x_{N+i} = x_i$.

微分の場合は.

非定常 affine 戸田方程式

$$H = \underline{K p \frac{\partial}{\partial p}} + \sum \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i+1}/x_i}_{p}$$

すなわち構成



elliptic norm.

対称関数

space 2 3 4 3

$A_1^{(1)}$ $(N=2)$.

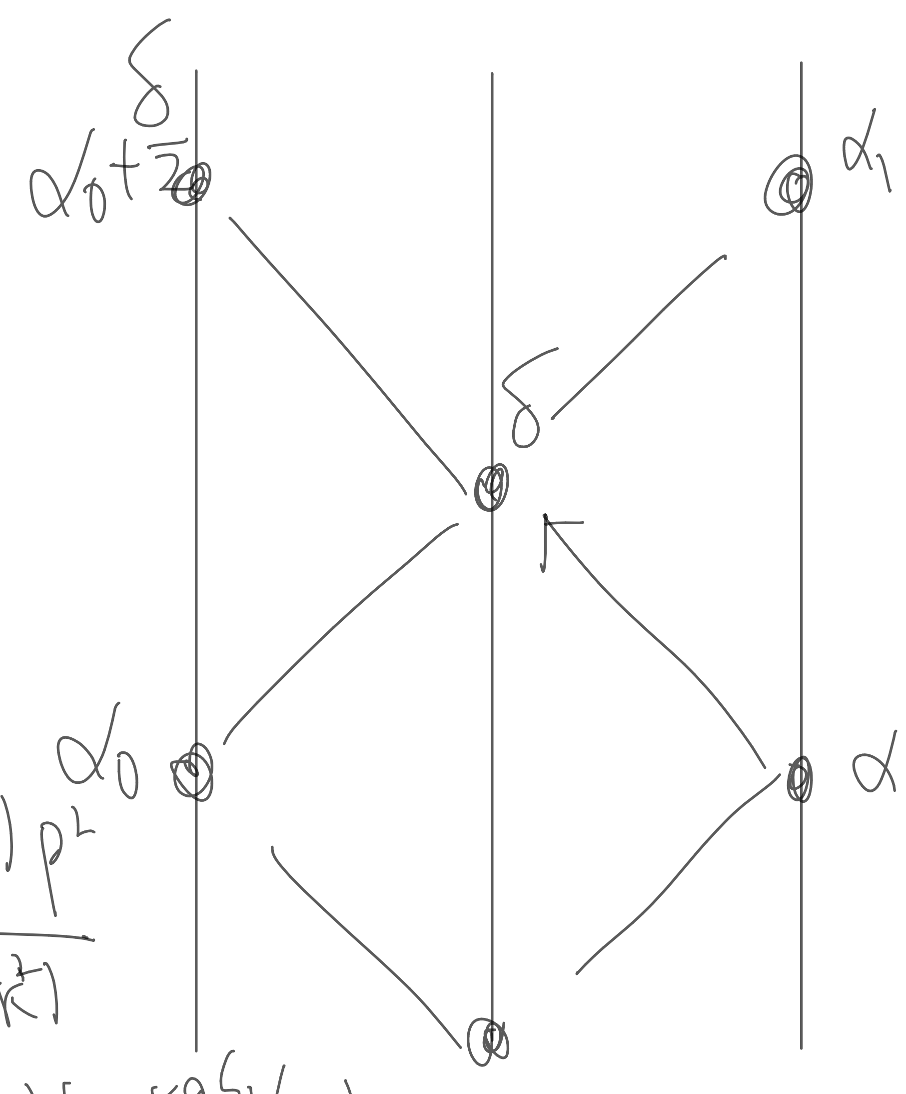
<u>定義</u>

$$\varphi = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \sum_{m,n} c_{mn} \, (p x_2/x_1)^m (p x_1/x_2)^n$$

$$\widehat{gl_2} \quad \mathcal{J} = \frac{1}{(pq x_2/x_1)_\infty (pq x_1/x_2)_\infty} \times q^{\frac{1}{2}\Delta} \, \kappa^{p\frac{\partial}{\partial p}}$$

<u>例え</u>

$$f = 1 + \frac{q}{(1-q)(1-\kappa q s_2/s_1)} (p x_2/x_1) + \frac{q}{(1-q)(1-\kappa q s_1/s_2)} (p x_1/x_2)^1$$
$$+ \frac{q^2}{(q)_2 (\kappa q s_2/s_1)_2} (p x_2/x_1)^2 + \frac{q^2}{(q)_2 (\kappa q s_1/s_2)_2} (p x_1/x_2)^2 + \frac{q^2 (1-q^2\kappa^2) p^2}{(1-q)^2 (1-\kappa^2)(1-\kappa q s_2/s_1)(1-\kappa q s_1/s_2)}$$



"非定常"

Ruijsenaars 作用素.

アラジンが要素入ってない.

注 演算子ない.

Mac

Jack.

t を入れる.

$$\widehat{f^{\mathfrak{gl}_N}}(x, p \mid s, \kappa \mid q, t)$$

マクドのアフィン化みたいなん.

"$\kappa = 1$"

q-Toda —— affine q-Toda

Toda

affine Toda

$Kp\frac{\partial}{\partial p}$ 項を

ふくむ非定常

Nekrasov 分配関数 ← Screening 作用素

(affine

or

affine Laumon space. にきけ!

定義 $N=2,3$. $k\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$. λ,μ: 分割. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$

$$N^{(k|N)}_{\lambda\mu}(u|k,q)=\prod_{\substack{1\leq i\leq j\\ \boxed{j-i\equiv k\ (\mathrm{mod}\ N)}}}\left(uq^{-\mu_i+\lambda_{j+1}}K^{-i+j};q\right)_{\lambda_j-\lambda_{j+1}}$$

$$\times\prod_{\substack{\beta\geq\alpha\geq 1\\ \boxed{\beta-\alpha\equiv -k-1\ (\mathrm{mod}\ N)}}}\left(uq^{\lambda_\alpha-\mu_\beta}K^{\alpha-\beta-1};q\right)_{\mu_\beta-\mu_{\beta+1}}$$

ALE space.

定義

$$\hat{f}^{\widehat{gl}_N}(x_1, x_2, \cdots, x_N, p \mid s_1, s_2, \cdots, s_N, \kappa \mid q, t)$$

$x_{N+i} = x_i$

モノミアル.

(分かつ有限しか与えてない

$$= \sum_{\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(N)}} \prod_{i,j=1}^{N} \frac{N^{(j-i|N)}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}(t s_j/s_i \mid \kappa, q)}{N^{(j-i|N)}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}(s_j/s_i \mid \kappa, q)} \cdot \prod_{\beta=1}^{N} \prod_{\alpha=1}^{\infty} \left(p x_{\alpha+\beta} / t x_{\alpha+\beta-1} \right)^{\lambda^{(\beta)}_\alpha}$$

; 分割の N 組

$p \to t$ にしたら $\Rightarrow$?

命題 $f^{\widehat{gl_N}} \xrightarrow{p \to 0} f^{gl_N}$ (つまり、野海-5 の Macdonald 関数)

命題 $q \to t$ (Schur limit)

S をてきとうに dominant integral wt

とするとき $f^{\widehat{gl_N}} \longrightarrow$ affine character $(\widehat{gl_N})$

Conj. $t\to 0$ とすると，$\mathcal{J}^{\widehat{gl_N}}(K)$ の固有関数となる(みたい).

Conj. $K=1$ の極限を考える(正規化ができるらしく) $\dfrac{1}{1-K^2}$

これは Ruijsenaars 作用素の固有関数.

ヤコビのテータ
$$\Theta_q(z)=(z)_\infty(p/z)_\infty(p)_\infty.$$

$$\boxed{D^{\mathrm{Ruijsenaars}}=\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)}T_{q,x_i}}$$