Affine Weyl group symmetry of the Garnier system

鈴木 貴雄

近畿大学 理工学部

研究集会「q, q and q」
2020 年 2 月 20 日

パンルヴェ VI 型方程式

$$t(t-1)\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H_{\mathrm{VI}}}{\partial p},\quad t(t-1)\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H_{\mathrm{VI}}}{\partial q},$$

$$H_{\mathrm{VI}}[\kappa_0,\kappa_1,\kappa_t,\kappa;q,p]=q(q-1)(q-t)p\left(p-\frac{\kappa_0}{q}-\frac{\kappa_1}{q-1}-\frac{\kappa_t-1}{q-t}\right)+\kappa q_i$$

は 20 世紀初めに，フックス型方程式のモノドロミー保存変形系として得られた．その後，この性質を利用した高階化が次々と発見された．
そうなると，方程式系がどれだけ存在するかが 1 つの問題となるが，これは次の 2 つの結果によりひとまず解決された．

事実 ([Oshima 08])

既約で実現可能なフックス型方程式は，アクセサリー・パラメーターの個数を固定すると，*Katz* の *2* つの変換（*addition* と *middle convolution*）によって有限個の方程式に帰着する．

事実 ([Haraoka-Filipuk 07])

フックス型方程式のモノドロミー保存変形系は，*Katz* の *2* つの変換の下で不変である．

以下に，代表的な 4 種類のモノドロミー保存変形系を記す．

- ガルニエ系
  - モノドロミー保存変形 [Garnier 1912]
- 笹野系
  - 岡本初期値空間とアフィン・ワイル群対称性 [Sasano 07]
  - 無限次元可積分系の相似簡約 [Fuji-S 08]
  - モノドロミー保存変形 [Sakai 10][Fuji-Inoue-Shinomiya-S 13]
- FST 系
  - 無限次元可積分系の相似簡約 [Fuji-S 09][S 13][Tsuda 14]
  - モノドロミー保存変形 [Sakai 10][Tsuda 14]
- 行列型パンルヴェ系
  - モノドロミー保存変形 [Sakai 10][Kawakami 15]

これらの方程式系については，いくつかの q-類似が既に得られている．

- q-ガルニエ系（またはその双対である q-FST 系）
  - モノドロミー保存変形の q-類似 [Sakai 05]
  - 無限次元離散可積分系の相似簡約 [Tsuda 10][S 15][S 17]
  - パデ法 [Nagao-Yamada 18]
  - 拡大アフィン・ワイル群の双有理表現 [Okubo-S 18]
- q-笹野系
  - 拡大アフィン・ワイル群の双有理表現 [Masuda 15]
- q-行列型パンルヴェ系
  - モノドロミー保存変形の q-類似 [Kawakami 20]

リーマン図式

$$\left(\begin{array}{ccccccc} z=t_1 & \dots & z=t_{n+2} & z=\infty & z=\lambda_1 & \dots & z=\lambda_n \\ 0 & \dots & 0 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ \theta_1 & \dots & \theta_{n+2} & \rho+\theta_\infty & 2 & \dots & 2 \end{array}\right),$$

ただし

$$t_{n+1}=0, \quad t_{n+2}=1, \quad \theta_1,\dots,\theta_{n+2},\theta_\infty \notin \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^{n+2}\theta_i+\theta_\infty+2\,\rho=1,$$

によって定まる，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上のフックス型方程式

(1)
$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1(z)\frac{dy}{dz}+P_2(z)y=0$$

を考える．ここで

$$\mu_i=\operatorname*{Res}_{z=\lambda_i}P_2(z)\,dz \quad (i=1,\dots,n),$$

とおき，更に変数変換

$$x_i=\frac{t_i}{t_i-1}, \quad q_i=\frac{\prod_{j=1}^n(t_i-\lambda_j)}{(t_i-1)\prod_{j=1,j\neq i}^n(t_i-t_j)},$$

$$p_i=-(t_i-1)\sum_{k=1}^n\frac{\prod_{j=1,j\neq i}^n(\lambda_k-t_j)}{\prod_{l=1,l\neq k}^n(\lambda_k-\lambda_l)}\mu_k \quad (i=1,\dots,n)$$

を行う．

事実 ([Garnier 1912], [Kimura-Okamoto 1984])

フックス型方程式 (1) のモノドロミー保存変形系は，ハミルトン系

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \frac{\partial K_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial K_i}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

$$\begin{aligned} x_i(x_i - 1)K_i = {} & q_i Q_\rho(Q_\rho + \theta_\infty) - (x_i + 1)(q_i p_i - \theta_i) q_i p_i \\ & + x_i p_i (q_i p_i - \theta_i) + (\theta_{n+1} + \theta_{n+2} x_i - 1) q_i p_i \\ & - \sum_{1 \le j \le n, j \ne i} S_{ij} q_i p_i (q_j p_j - \theta_j) + \sum_{1 \le j \le n, j \ne i} S_{ji} q_i (q_j p_j - \theta_j) p_j \\ & + \sum_{1 \le j \le n, j \ne i} S^*_{ij} (q_i p_i - \theta_i) p_i q_j + \sum_{1 \le j \le n, j \ne i} S_{ij} (q_i p_i - \theta_i) q_j p_j, \end{aligned}$$

ただし

$$S_{ij} = \frac{x_i(x_j - 1)}{x_j - x_i}, \quad S^*_{ij} = \frac{x_i(x_i - 1)}{x_i - x_j}, \quad Q_\rho = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i + \rho,$$

として表される（以降これをガルニエ系と呼ぶ).

定数パラメーターを

$$\varepsilon_1=\theta_{n+1},\quad \varepsilon_2=\theta_{n+2},\quad \varepsilon_3=\theta_\infty,\quad \varepsilon_j=\theta_{j-3}\quad (j=4,\dots,n+3)$$

と書き直し，双有理変換 σ_k $(k=0,\dots,n+3)$ を次のように定める．$k=0$ のとき

$$\sigma_0(\varepsilon_1)=1-\varepsilon_2,\quad \sigma_0(\varepsilon_2)=1-\varepsilon_1,\quad \sigma_0(\varepsilon_j)=\varepsilon_j\quad (j\neq 1,2),$$
$$\sigma_0(x_i)=\frac{1}{x_i},\quad \sigma_0(q_i)=\frac{p_i(q_ip_i-\varepsilon_{i+3})}{Q_\rho(Q_\rho+\varepsilon_3)},\quad \sigma_0(p_i)=-\frac{Q_\rho(Q_\rho+\varepsilon_3)}{p_i},$$

$k=1$ のとき

$$\sigma_1(\varepsilon_j)=\varepsilon_{(12)j},$$
$$\sigma_1(x_i)=\frac{1}{x_i},\quad \sigma_1(q_i)=\frac{q_i}{x_i},\quad \sigma_1(p_i)=x_ip_i,$$

$k=2$ のとき

$$\sigma_2(\varepsilon_j)=\varepsilon_{(23)j},$$
$$\sigma_2(x_i)=\frac{x_i}{x_i-1},\quad \sigma_2(q_j)=\frac{q_i}{Q_1},\quad \sigma_2(p_i)=(p_i-Q_\rho)Q_1,$$

ただし

$$Q_1=\sum_{i=1}^{n}q_i-1,$$

$k=3$ のとき

$$\sigma_3(\varepsilon_j)=\varepsilon_{(34)j},$$
$$\sigma_3(x_1)=\frac{1}{x_1},\quad \sigma_3(q_1)=\frac{1}{q_1},\quad \sigma_3(p_1)=-q_1Q_\rho,$$
$$\sigma_n(x_i)=\frac{x_i}{x_1},\quad \sigma_3(q_i)=-\frac{q_i}{q_1},\quad \sigma_3(p_i)=-q_1p_i\quad (i\neq 1),$$

$k=4,\dots,n+2$ のとき

$$\sigma_k(\varepsilon_j)=\varepsilon_{(k\,k+1)j},$$
$$\sigma_k(x_i)=x_{(k-3\,k-2)i},\quad \sigma_k(q_i)=q_{(k-3\,k-2)i},\quad \sigma_k(p_i)=p_{(k-3\,k-2)i},$$

$k=n+3$ のとき

$$\sigma_{n+3}(\varepsilon_j)=(-1)^{\delta_{j,n+3}}\varepsilon_j,$$
$$\sigma_{n+3}(x_i)=x_i,\quad \sigma_{n+3}(q_i)=q_i,\quad \sigma_{n+3}(p_i)=p_i-\delta_{i,n}\frac{\varepsilon_{n+3}}{q_n}.$$

定理 ([S 05])

ガルニエ系は双有理変換 $\sigma_0, \dots, \sigma_{n+3}$ の下で不変である．更に，群 $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_{n+3} \rangle$ は，$B_{n+3}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群と同型である．すなわち，基本関係式

$$\begin{aligned}
&\sigma_k^2 = 1 \quad (k = 0, \dots, n+3), \\
&(\sigma_0\,\sigma_2)^3 = 1, \quad (\sigma_k\,\sigma_{k+1})^3 = 1 \quad (k = 1, \dots, n+1), \quad (\sigma_{n+2}\,\sigma_{n+3})^4 = 1, \\
&(\sigma_k\,\sigma_l)^2 = 1 \quad (\textit{otherwise})
\end{aligned}$$

を満たす．

注意

$n = 1$ の場合（すなわち P_{VI} の場合）は上に記した変換に加えて，

$$\begin{aligned}
&\sigma_0^*(\varepsilon_j) = \varepsilon_j + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (j = 1, \dots, 4), \\
&\sigma_0^*(x) = x, \quad \sigma_0^*(q) = q - \frac{\varepsilon_4}{p}, \quad \sigma_0^*(p) = p
\end{aligned}$$

が方程式系を不変に保つ変換として存在する（岡本変換と呼ばれる）．このとき，双有理変換のなす群は $B_4^{(1)}$ 型ではなく $F_4^{(1)}$ 型となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & {[0,0]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & {[0,1]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & {[0,2]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {[1,0]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & {[1,1]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & {[1,2]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
\cdots \arrow[r] & {[2,0]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & {[2,1]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & {[2,2]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
 & \vdots & \vdots \arrow[ul] & \vdots \arrow[ul] & {} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

上の箙の頂点に対応する係数を $y_{[i,k]}$ $(i \in \mathbb{Z}_{mn}, k \in \mathbb{Z}_m)$ とおく．更に，乗法的単純ルートに対応するパラメーターを

$$
a_i = \prod_{l=0}^{m-1} y_{[i,l]} \quad (i \in \mathbb{Z}_{mn}), \quad b_k = \prod_{j=0}^{mn-1} y_{[j,k]}, \quad b'_k = \prod_{j=0}^{mn-1} y_{[j+k,k]} \quad (k \in \mathbb{Z}_m)
$$

と定める．ただし，零ルートに対応する条件

$$
\prod_{i=0}^{mn-1} a_i = \prod_{k=0}^{m-1} b_k = \prod_{k=0}^{m-1} b'_k = q
$$

を仮定する．

ディンキン図形の自己同型 π, π', ρ を

$$\pi(y_{[i,k]}) = y_{[i+1,k+1]}, \quad \pi'(y_{[i,k]}) = y_{[i+1,k]}, \quad \rho(y_{[i_2 m+i_1,k]}) = y_{[(n-i_2)m-i_1,k-i_1]}$$

と定める．更に，a_i に対応する単純鏡映 r_i $(i \in \mathbb{Z}_{mn})$ を

$$r_0(y_{[0,k]}) = \frac{\sum_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{k_1-1} y_{[0,k+k_2]}}{\sum_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{k_1} y_{[0,k+k_2+1]}}, \quad r_0(y_{[1,k]}) = y_{[1,k]} \frac{\sum_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{k_1} y_{[0,k+k_2]}}{\sum_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{k_1-1} y_{[0,k+k_2]}},$$

$$r_0(y_{[-1,k]}) = y_{[-1,k]} \frac{\sum_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{k_1} y_{[0,k+k_2+1]}}{\sum_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{k_1-1} y_{[0,k+k_2+1]}}, \quad r_0(y_{[j,k]}) = y_{[j,k]} \quad (j \neq 0, \pm 1)$$

及び $r_i = \pi^{-1} r_{i-1} \pi$ によって，b_0 に対応する単純鏡映 s_0 を，$m = 2$ のときは

$$s_0(y_{[i,0]}) = \frac{\sum_{i_1=0}^{2n-1} \prod_{i_2=0}^{i_1-1} y_{[i+i_2,0]}}{\sum_{i_1=0}^{2n-1} \prod_{i_2=0}^{i_1} y_{[i+i_2+1,0]}}, \quad s_0(y_{[i,1]}) = y_{[i,0]} y_{[i,1]} \frac{\sum_{i_1=0}^{2n-1} \prod_{i_2=0}^{i_1} y_{[i+i_2+1,0]}}{\sum_{i_1=0}^{2n-1} \prod_{i_2=0}^{i_1-1} y_{[i+i_2,0]}},$$

$m = 3$ のときは

$$s_0(y_{[i,0]}) = \frac{\sum_{i_1=0}^{mn-1} \prod_{i_2=0}^{i_1-1} y_{[i+i_2,0]}}{\sum_{i_1=0}^{mn-1} \prod_{i_2=0}^{i_1} y_{[i+i_2+1,0]}}, \quad s_0(y_{[i,1]}) = y_{[i,1]} \frac{\sum_{i_1=0}^{mn-1} \prod_{i_2=0}^{i_1} y_{[i+i_2,0]}}{\sum_{i_1=0}^{mn-1} \prod_{i_2=0}^{i_1-1} y_{[i+i_2,0]}},$$

$$s_0(y_{[i,-1]}) = y_{[i,-1]} \frac{\sum_{i_1=0}^{mn-1} \prod_{i_2=0}^{i_1} y_{[i+i_2+1,0]}}{\sum_{i_1=0}^{mn-1} \prod_{i_2=0}^{i_1-1} y_{[i+i_2+1,0]}}, \quad s_0(y_{[i,l]}) = y_{[i,l]} \quad (l \neq 0, \pm 1)$$

によって，b_k, b'_k に対応する単純鏡映 s_k, s'_k $(k \in \mathbb{Z}_m)$ を，$s_k = \pi^{-1} s_{k-1} \pi$，$s'_k = \rho s_k \rho$ によって，それぞれ定める．

これらの変換は箙の変異から導かれ（詳細については省略する），パラメーターに次の表のように作用する．

	r_i	s_k	s'_k	π	π'	ρ
a_j	$a_j a_i^{-a_{ij}}$	a_j	a_j	a_{j+1}	a_{j+1}	a_{-j}
b_l	b_l	$b_l b_k^{-b_{kl}}$	b_l	b_{l+1}	b_l	b'_l
b'_l	b'_l	b'_l	$b'_l(b'_k)^{-b_{kl}}$	b'_l	b'_{l-1}	b_l

ただし，$[a_{ij}]_{i,j}\,,[b_{kl}]_{k,l}$ はそれぞれ $A^{(1)}_{mn-1}$ 型，$A^{(1)}_{m-1}$ 型のカルタン行列である．

定理 ([Masuda-Okubo-Tsuda 19])

群 G, H, H' を

$$G = \langle r_0, \ldots, r_{mn-1} \rangle, \quad H = \langle s_0, \ldots, s_{m-1} \rangle, \quad H' = \langle s'_0, \ldots, s'_{m-1} \rangle$$

と定める．このとき，G, H, H' は $A^{(1)}_{mn-1}$ 型，$A^{(1)}_{m-1}$ 型，$A^{(1)}_{m-1}$ 型アフィン・ワイル群とそれぞれ同型である．更に，どの 2 つの群も互いに可換である．すなわち，

$$GH = HG, \quad GH' = H'G, \quad HH' = H'H$$

である．

以上により，拡大アフィン・ワイル群 $\langle G, H, H' \rangle \rtimes \langle \pi, \pi', \rho \rangle$ が得られた．この群に含まれる平行移動変換は，様々な高階 q-パンルヴェ系を与える．特に $m = 2$ の場合に，次の結果が得られている．

定理 ([Okubo-S 18])

平行移動変換 $T_1, \ldots, T_{n-1}$ を

$$T_i = (r_{i+1} \ldots r_{2n-1}\, \pi\, r_1 \ldots r_i)(r_{i+n+1} \ldots r_{2n-1}\, \pi\, r_1 \ldots r_{i+n})$$

と定める．これらはパラメーターに

$$T_i(a_i) = q\, a_i, \quad T_i(a_{i+1}) = \frac{a_{i+1}}{q}, \quad T_i(a_{i+n}) = q\, a_{i+n}, \quad T_i(a_{i+n+1}) = \frac{a_{i+n+1}}{q}$$

と作用し，係数 $y_{[i,k]}$ への作用は q-ガルニエ系と等価である．

注意

双有理変換 $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n+3}$ はすべて拡大アフィン・ワイル群 $\langle G, H, H' \rangle \rtimes \langle \pi, \pi', \rho \rangle$ に由来すると期待したいが，今のところ部分的にしか導かれていない．特に，フックス型方程式の特異点の入れ替え $z \mapsto 1 - z$ に由来する変換 σ_1 の由来が不明である．

方程式については次のような問題意識を持っている.

問題

Katz-大島理論の q-類似を確立する.

問題

楕円差分パンルヴェ方程式の高階化で未知のものがあるはずなので，それを定式化する.

また，解については次のような問題意識を持っている.

問題

特殊解（特に超幾何函数解）について，微分差分をすべて含めて系統的に調べる.

問題

一般解の漸近展開について調べる.