Hall 代数と Yang-Baxter 方程式
q, q, & q 研究集会

柳田　伸太郎

名古屋大学多元数理科学研究科
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/ yanagida/index-j.html

2020 年 2 月 19 日

1. 概要

- Ringel-Hall 代数: 有限的 (finitary) な Abel 圏 A に対して拡大の数え上げで定義される結合代数 $H(\mathsf{A})$ のこと.
  - ループなし箙 Q 上の表現圏 $\mathsf{A} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ の場合, 代数埋め込み $U_{\sqrt{q}}(\mathfrak{b}_Q) \hookrightarrow H(\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ がある (Ringel, 1990).
  - A が更に遺伝的なら, $H(\mathsf{A})$ は Hopf 内積付きの双代数の構造を持つ (Green, 1995). $\rightsquigarrow$ Drinfeld ダブル $DH(\mathsf{A})$.
- Bridgeland-Hall 代数: A の二周期複体の Hall 代数 $BH(\mathsf{A})$.
  A が遺伝的なら, これは $DH(\mathsf{A})$ と一致する.

  Bridgeland, *Quantum groups via Hall algebras of complexes*, Ann. Math., 2013

  Y., *A note on Bridgeland's Hall algebra of 2-periodic complexes*, Math. Z., 2016.
- これは Yang-Baxter 方程式の解が複体の圏を用いて構成できることを意味する.

1. 概要

- この構成を二周期複体のモジュライ空間を用いて説明したい.
- Hall 代数の幾何学的定式化
    - Ringel-Hall 代数 $H(\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ の Lusztig 構成: Q の表現のモジュライ空間上の構成可能 ℓ 進層を用いる.

      Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser, 1993.
    - Toën の導来 Hall 代数: dg 圏のモデル圏構造を用いた, $\mathbb{F}_q$ 上の複体の Hall 代数の理論.

      Toën, *Derived Hall algebras*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 2007.
    - 複体のモジュライ空間は導来スタックを用いて定義できる.

      Toën, Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Éc. Norm. Sup., 2007.
    - 複体のモジュライ空間を用いた導来 Hall 代数の幾何学的定式化.

      Y., *Geometric derived Hall algebra*, arXiv:1912.05442.

$\mathbb{F}_q$: q 元からなる有限体.

定義

以下の条件を満たす圏 A を $\mathbb{F}_q$ 上の有限的 (finitary) Abel 圏と呼ぶ.

- $\mathbb{F}_q$ 線形 Abel 圏.
- 本質的に小 (対象の同型類全体 $\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ と $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\cdot,\cdot)$ は集合).
- $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\cdot,\cdot)$ は有限次元線形空間.
- 大域次元が有限 (十分大きい i に対して $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\cdot,\cdot) = 0$).

A の例:

- mod-R: $\mathbb{F}_q$ 上の有限次元代数 R 上の有限次元右加群のなす圏.
- Coh(X): $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影的代数多様体 X 上の
  連接 $\mathscr{O}_X$ 加群層のなす圏.

- A: $\mathbb{F}_q$ 上の有限的 Abel 圏. $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$ を固定.

定理/定義 (Ringel, 1990)

- 以下で定まる単位的結合 $\mathbb{C}$ 代数 $(H(\mathsf{A}), *)$ を A の Hall 代数と呼ぶ.
  - $H(\mathsf{A}) := \bigoplus_{[M]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \mathbb{C}[M]$,
  - $[M] * [N] := \nu^{\chi(M,N)} \sum_{[L]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M,N)_L|}{|\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(M)||\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(N)|}[L]$,

    $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M,N)_L := \{0 \to N \to L \to M \to 0 \mid \mathsf{A}$ の短完全列 $\}$.
- Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{A})$ の群環で
  - $\widetilde{H}(\mathsf{A}) := \mathbb{C}K_0(\mathsf{A}) \bigotimes_{\mathbb{C}} H(\mathsf{A})$, $k_\alpha \in \mathbb{C}K_0(\mathsf{A})$ $(\alpha \in K_0(\mathsf{A}))$
  - $k_\alpha * [M] = \nu^{\chi_S(\alpha,M)}[M] * k_\alpha$

  と拡大した結合代数を A の拡大 Hall 代数と呼ぶ.
- $\chi(\cdot,\cdot) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\cdot,\cdot)$, $\chi_S(M,N) := \chi(M,N) + \chi(N,M)$.

- Q: ループなし箙.
  $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q = \text{mod-}\mathbb{F}_q Q$: Q の表現圏. これは有限的 Abel 圏.
  $\rightsquigarrow$ 拡大 Hall 代数 $\widetilde{H}(\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ が定まる.
- $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$.
  $U_\nu(\mathfrak{g}_Q)$: Q に付随する Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}_Q$ の量子群.
  $U_\nu(\mathfrak{b}_Q) \subset U_\nu(\mathfrak{g}_Q)$: Borel 部分代数.

定理 (Ringel, 1990)

次のような代数埋め込みが存在する.

$$U_\nu(\mathfrak{b}_Q) \longrightarrow \widetilde{H}(\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q), \quad E_i \longmapsto [S_i], \; K_i \longmapsto k_{\overline{S_i}}.$$

Q が ADE 箙の場合, この埋め込みは同型.

定理 (Green, 1995; Xiao, 1997)

有限的 Abel 圏 A が遺伝的 ($\mathrm{Ext}_{\mathsf{A}}^{i\geq 2}(\cdot,\cdot)=0$) ならば,
$\widetilde{H}(\mathsf{A})$ は 位相的双代数の構造を持つ.
更に A の任意の対象の部分対象が有限個なら $\widetilde{H}(\mathsf{A})$ は Hopf 代数.

Green の余積と Hopf 内積:

$$\Delta([L]) := \sum_{[M],[N]} \nu^{\chi(M,N)} \frac{|\mathrm{Ext}_{\mathsf{A}}(M,N)_L|}{|\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(L)|}[M]\otimes[N],$$

$$([M]*k_\alpha,[N]*k_\beta) = \frac{\delta_{M,N}\,\chi_S(\alpha,\beta)}{|\,\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(M)|}.$$

定理 (Green, 1995; Xiao, 1997)

Ringel の代数埋め込み $U_\nu(\mathfrak{b}_Q)\hookrightarrow \widetilde{H}(\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_q}Q)$ は Hopf 代数埋め込み.

- C: 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影曲線.
  連接 $\mathscr{O}_C$ 加群層のなす圏 Coh(C) は有限的かつ遺伝的な Abel 圏.
  特に $\widetilde{H}(\mathrm{Coh}(C))$ が定義され, 位相的双代数である.
- [Kapranov,1997]: C が射影直線 $\mathbb{P}^1$ の場合,
  $\widetilde{H}(\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^1))$ の中心拡大 $\widetilde{H}'(\mathbb{P}^1)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 量子ループ代数の Borel 部分代数 $U_\nu(\mathcal{L}\mathfrak{b}_+)$ を部分双代数に持つ:

$$U_\nu(\mathcal{L}\mathfrak{b}_+) \hookrightarrow \widetilde{H}'(\mathbb{P}^1).$$

- [Burban-Schiffmann, 2006 (2012)]: C が楕円曲線 E の場合,
  $\widetilde{H}(\mathrm{Coh}(E))$ の中心拡大 $\widetilde{H}'(E)$ は $\mathfrak{gl}_1$ 量子トロイダル代数 (Ding・庵原・三木代数) の "Borel" 部分代数を部分双代数に持つ.

2.2 Bridgeland-Hall 代数 — 二周期複体

A: ($\mathbb{F}_q$ 上の) 有限的 Abel 圏で豊富な射影的対象を持つ.
$\mathsf{P}_\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$: 射影的対象のなす充満部分圏
$\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$: 次の形の鎖複体のなす圏

$$\begin{aligned} M_\bullet &= (\cdots \to \underset{-1}{M_1} \xrightarrow{d_1} \underset{0}{M_0} \xrightarrow{d_0} \underset{1}{M_1} \xrightarrow{d_1} \underset{2}{M_0} \to \cdots) \quad M_i \in \mathsf{P}_\mathsf{A} \\ &=: \left(M_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightleftarrows}} M_0 \right). \end{aligned}$$

$\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ は有限的 Abel 圏. $\rightsquigarrow$ Hall 代数 $H(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ が定義される.

$$[M_\bullet] * [N_\bullet] := \nu^{\chi(M_0,N_0)+\chi(M_1,N_1)} \sum_{[L_\bullet]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))} g_{M_\bullet,N_\bullet}^{L_\bullet} [L_\bullet].$$

目的の代数 $BH(\mathsf{A})$ は (非可換) 結合代数 $H(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ を非輪状複体に対応する部分集合で局所化したもの.

命題

1. $M_\bullet \in \mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ が非輪状 ($:\iff H_*(M_\bullet) = 0$) なら, $M_\bullet \simeq K_{P_\bullet} \oplus K^*_{Q_\bullet}$ なる対象 $P, Q \in \mathsf{P}_\mathsf{A}$ が一意に存在. 但し
$$K_{P_\bullet} := \Bigl(P \underset{0}{\overset{\mathrm{id}_P}{\rightleftarrows}} P \Bigr), \quad K^*_{Q_\bullet} := \Bigl(Q \underset{-\mathrm{id}_Q}{\overset{0}{\rightleftarrows}} Q \Bigr).$$
2. $\{[M_\bullet] \mid H_*(M_\bullet) = 0\}$ は Ore 条件を満たす.

定義 (Bridgeland, 2013)

A は次の二条件を満たす圏とする.

- A は遺伝的かつ有限的な Abel 圏.
- A は十分豊富な射影的対象を持つ.

結合代数 $BH(\mathsf{A})$ を $H(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ の局所化で以下のように定義し, Bridgeland-Hall 代数と呼ぶ:

$$BH(\mathsf{A}) := H(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))\big[[M_\bullet]^{-1} \mid H_*(M_\bullet) = 0\big].$$

A の例:

- $\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$: ループなし箙 Q の $\mathbb{F}_q$ 上の表現圏.
- $\mathsf{Coh}(C)$: $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影的曲線 C 上の連接 $\mathscr{O}_C$ 加群層のなす圏.

2.2 Bridgeland-Hall 代数 — 三角分解

Bridgeland は $K_0(\mathsf{A})$ が良い性質を満たす A に対して $BH(\mathsf{A})$ の三角分解を定義し, $H(\mathsf{A})$ と $BH(\mathsf{A})$ との関係を調べた.

定理 (Bridgeland,2013)

1. 以下のような線型同型がある.

$$\widetilde{H}(\mathsf{A}) \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{H}(\mathsf{A}) \longrightarrow BH(\mathsf{A}),$$
$$[M] \otimes 1 \mapsto E_M,\ 1 \otimes [N] \mapsto F_N,\ k_\alpha \otimes 1 \mapsto k_\alpha,\ 1 \otimes k_\beta \mapsto k_\beta^*.$$

   更にこれは代数埋め込み $\widetilde{H}(\mathsf{A}) \rightrightarrows BH(\mathsf{A})$ を定める.

2. $\mathsf{A} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ なら代数埋め込み

$$U_\nu(\mathfrak{g}_Q) \longhookrightarrow BH(\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)_{\mathsf{red}}$$

   がある. 更に Q が ADE 箙ならこの埋め込みは同型.

2.3 Drinfeld ダブルとの関係

- Ringel-Hall 代数 $\widetilde{H}(\mathsf{A})$ は以下の余積 Δ と内積 $(\cdot,\cdot)$ で Hopf 内積付きの位相的双代数になる (Green, 1995).
- Hopf 内積付きの双代数 H の Drinfeld ダブル DH: $H \otimes_{\mathbb{C}} H$ 上に次の様な代数構造 $\circ$ が一意に定まる:
  - $H \rightrightarrows H \otimes_{\mathbb{C}} H$: $a \mapsto a \otimes 1$ 及び $a \mapsto 1 \otimes a$ は共に代数埋め込み.
  - $(a \otimes 1) \circ (1 \otimes b) = a \otimes b$
  - $\sum (a_{(2)}, b_{(1)}) a_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum (a_{(1)}, b_{(2)})(1 \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes 1)$.

定理 (Bridgaland, Y.)

A は次の三条件を満たす圏とする.

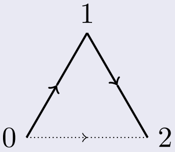
- A は遺伝的かつ有限的な Abel 圏.
- A は十分豊富な射影的対象を持つ.
- $K_0(\mathsf{A})$ は良い条件を満たす. ($\rightsquigarrow BH(\mathsf{A})$ は三角分解を持つ.)

この時 $BH(\mathsf{A})$ は $\widetilde{H}(\mathsf{A})$ の Drinfeld ダブルと代数同型.

3.1. 導来スタック — 無限圏

導来代数幾何学は無限圏や無限トポスを用いて定式化される.

- $\Lambda^n_j \subset \Delta^n$: n 単体と j-th horn $(0 \leq j \leq n)$.
- 無限圏とは単体的集合 K であって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $0 < j < n$ 及び単体写像 $f : \Lambda^n_j \to K$ に対しリフト $\overline{f} : \Delta^n \to K$ が存在するもののこと.



$\Lambda^2_1 \subset \Delta^2$

- 通常の圏は対象を頂点, 射を辺とみなすことで無限圏と思える (ナーブ構成).
- 無限圏の定義で "$0 \leq j \leq n$ に対してリフトが存在" としたものが Kan 複体.

- k: 可換環.
- sCom: 単体的可換 k 代数の圏.
- sCom_∞: sCom を (単体的集合の圏 Set_Δ に Kan モデル構造を入れ $\mathrm{sCom} \subset \mathrm{Set}_\Delta$ とみた時の) 弱同値で局所化して得られる無限圏.

定義

$\mathrm{dAff}_\infty := (\mathrm{sCom}_\infty)^{\mathrm{op}}$ をアフィン導来スキームの無限圏と呼ぶ.

導来スキームの簡単な説明:

- dRgSp_∞: 導来環付き空間の無限圏. 対象は位相空間 X と X 上の単体的可換 k 代数層 $\mathscr{O}_X$ の組 $(X, \mathscr{O}_X)$.
- dSch_∞: 導来スキームの無限圏. 以下のような $(X, \mathscr{O}_X)$ が張る dRgSp_∞ の部分無限圏.
  - truncation $(X, \pi_0(\mathscr{O}_X))$ はスキーム.
  - 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $\pi_n(\mathscr{O}_X)$ は準連接 $\pi_0(\mathscr{O}_X)$ 加群層.

sCom$_\infty$ の射 $A \to B$ がエタール [潤滑] :$\iff$

- $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ が可換 k 代数のエタール射 [潤滑射].
- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\pi_0(B)$ 加群射 $\pi_n(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \to \pi_n(B)$ が同型.

エタール射によって無限圏 dAff$_\infty$ 上のエタール位相 et が定義される.

定義

導来スタックの無限圏

$$\mathsf{dSt}_\infty := \mathsf{Sh}_{\infty,\mathrm{et}}(\mathsf{dAff}_\infty)^\wedge \subset \mathsf{Fun}_\infty((\mathsf{dAff}_\infty)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}_\infty)$$

$\mathcal{S}_\infty$: 空間 (Kan 複体) の無限圏.

A: 有限的な Abel 圏, 十分豊富な射影的対象を持つ.
$\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$: 射影的対象からなる二周期複体の圏. 射影的モデル構造を持つ.

命題 (c.f. Toën-Vaquié, 2009)

$\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ の対象のモジュライ $\mathscr{O}b$ 及びコファイブレーションのモジュライ $\mathscr{E}x$ が (局所幾何学的かつ局所有限型な) 導来スタックで構成できる.

導来スタックの射

$$s, c, t : \mathscr{E}x(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})) \longrightarrow \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$$

であって, コファイブレーション $u : X \hookrightarrow Y$ を

$$s(u) = X, \quad t(u) = Y, \quad c(u) = Y \coprod^{X} 0.$$

に写すものがある.

これから次の導来スタックの図式を得る:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}x(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "p:=s\times c"] & \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})) \\ \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))^{\times 2} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (u : X \hookrightarrow Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Y \\ (X, Y \coprod^X 0) & \end{tikzcd}$$

定理 (Y., arXiv:1912.05442)

局所幾何学的な導来スタック $\mathscr{X}$ 上の構成可能 lisse-étale $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層のなす導来無限圏 $\mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ およびその間の 6 つの導来函手が定義できる.

3.2. Hall 代数の幾何学的構成

$\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ のモジュライ空間の図式にこの一般論を適用すると

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{E}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "c_!"] & \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} \arrow[u, "p^*"] & \end{tikzcd}$$

これらの合成のシフトで次の函手を定める.

$$\mu := c_! p^*[\dim p] : \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} \longrightarrow \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$\Delta := p_! c^*[\dim p] : \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2}.$$

定理 (Y., arXiv:1912.05442; Hall 代数の幾何学的構成)

μ は結合的, Δ は余結合的.

注意

- $\mu : \mathsf{D}_c(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\otimes 2} \to \mathsf{D}_c(\mathscr{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ から, 層と函数の辞書

$$M_\bullet \longmapsto \left(\mathrm{Tr}(M_\bullet) : x \mapsto \textstyle\sum_n (-1)^n \,\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, H_n(M_\bullet)|_x)\right)$$

で $\mathscr{O}b$ 上の函数空間に結合代数が定まるが, それは $BH(\mathsf{A})$ と同型.

- Bridgeland の代数的な定義

$$BH(\mathsf{A}) := H(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))\left[[M_\bullet]^{-1} \mid H_*(M_\bullet) = 0\right].$$

では非可換局所化が必要だったが, 幾何学的構成では不要.
($\because$ 非輪状な複体のなす $\mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ の部分スタックは可縮.)

- A: 遺伝的かつ有限的な Abel 圏で十分豊富な射影的対象を持つ.
  $\mathsf{P}_A \subset$ A: 射影的対象のなす充満部分圏.
- 任意の対象 $M \in$ A は極小な射影分解を (同型を除いて) 唯一持つ:

$$0 \longrightarrow P_M \xrightarrow{f_M} Q_M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (P_M, Q_M \in \mathsf{P}_\mathsf{A}).$$

M の射影分解 $0 \to P \xrightarrow{f} Q \to M \to 0$ が極小 $:\Longleftrightarrow$ $P = \bigoplus_i P_i$, $Q = \bigoplus_j Q_j$ と直和分解して $f = (f_{ij} : P_i \to Q_j)$ と行列表示した時, どの f_{ij} も同型でないこと.

- $\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$: 射影的対象からなる二周期複体の圏.
  $M \in$ A から $E_{M\bullet}, F_{M\bullet} \in \mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ が定まる:

$$E_{M\bullet} := \left(P_M \underset{0}{\overset{f_M}{\rightleftarrows}} Q_M \right), \quad F_{M\bullet} := \left(Q_M \underset{-f_M}{\overset{0}{\rightleftarrows}} P_M \right).$$

- $\mathscr{F}x \subset \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$: 次の形の二周期複体のモジュライ空間.

$$S_\bullet^{M,N} = \left(P_M \oplus Q_N \underset{\left[\begin{smallmatrix} * & * \\ * & -f_N \end{smallmatrix}\right]}{\overset{\left[\begin{smallmatrix} f_M & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right]}{\rightleftarrows}} Q_M \oplus P_N \right) \quad (M, N \in \mathsf{A}).$$

- $\lim^0 : \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})) \longrightarrow \mathscr{F}x,\ M_\bullet \longmapsto E_{H_0(M_\bullet)} \oplus F_{H_1(M_\bullet)}$.
- $\mathscr{S}\mathscr{E} \subset \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})) \times \mathscr{F}x$ と $\mathscr{Z}$ を次で定義:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}\mathscr{E} := \{(L_\bullet, S_\bullet^{M,N}) \mid \lim^0(L_\bullet) = S_\bullet^{M,N}\} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})) \times \mathscr{F}x \arrow[d, "p_1"'] \\
\mathscr{Z} \arrow[r, hook] & \mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))
\end{tikzcd}$$

- この時点で得られる図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{S}\mathscr{E} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathscr{F}x \\
\mathscr{Z} &
\end{tikzcd}
$$

から $\mathrm{stab} := p_{1!}p_2^* : \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{F}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{Z}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ と定義.

- 以上の構成で $\lim^0$ の代わりに $\lim^1 : M_\bullet \mapsto E_{H_1(M_\bullet)} \oplus F_{H_0(M_\bullet)}$ を用いて図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{S}\mathscr{E}' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathscr{F}x \\
\mathscr{Z}' &
\end{tikzcd}
$$

と $\mathrm{unstab} : \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{F}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathsf{D}_\mathrm{c}(\mathscr{Z}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を定義.

- $K_0(\mathsf{A})$ が良い性質を持つと仮定.
  $\rightsquigarrow BH(\mathsf{A})$ の三角分解から次の図式が得られる.

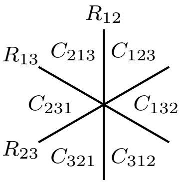
$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{D}_c(\mathscr{L}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d, "\sim"', "三角分解"] \\
\mathsf{D}_c(\mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{D}_c(\mathscr{F}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[ur, bend left, "stab", "\sim"'] \arrow[dr, bend right, "unstab"', "\sim"] & \mathsf{D}_c(\mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
 & & \mathsf{D}_c(\mathscr{L}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[u, "\sim", "三角分解"']
\end{tikzcd}
$$

- "普遍 R 行列" を次で定義する.

$$
\begin{gathered}
R := (\mathrm{unstab})^{-1} \circ \mathrm{stab} : \\
\mathsf{D}_c(\mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} \longrightarrow \mathsf{D}_c(\mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2}.
\end{gathered}
$$

“普遍 R 行列” が Yang-Baxter 方程式を満たすこと:

- 2 階テンソルの場合の $\mathscr{O}b(\mathsf{C}_2(\mathsf{A}))^2 \supset \mathscr{F}x$ や $\mathscr{L}$ を 3 階テンソルに拡張.
  $\rightsquigarrow \mathscr{L}_C$, C は A_2 ルート系のワイル部屋に対応.
- Yang-Baxter 方程式



$$
\begin{aligned}
R_{23}R_{13}R_{12} &= \mathrm{stab}_{C_{321}}^{-1} \circ \mathrm{stab}_{C_{123}} \\
&= R_{12}R_{13}R_{23}
\end{aligned}
$$

以上です.