レポート問題解答 (2011.4.19 出題)

1. 次を求めよ (計算経過も書くこと.)

   (a) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

   $\log(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log(1+\sin x) = \frac{\sin x}{x}\log(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$. $x\to 0$ のとき $\frac{\sin x}{x}\to 1$ で, $\sin x\to 0$ より $(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\to e$. よって $\log x$ の連続性 より $\frac{\sin x}{x}\log(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\to 1\cdot 1=1$. e^x の連続性より $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^1=e$.

   「$f(x)\to a$, $g(x)\to b$ ならば $f(x)^{g(x)}\to a^b$」は極限の基本性質とは言えないので, 対数を取って積の極限に持ち込んで計算すべきであろう. (ただし, 今回は正解とした.)

   また, $\frac{\sin x}{x}$ の極限を先にとって $\lim_{x\to 0}\log(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\log(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \cdots$ というような書き方はよくない. 積の極限を計算する場合には, 積を構成するそれぞれの極限が存在することを確かめ, それぞれの値を求めてから, 上で示したように一度に極限の値に置き換えるべきである.

   (b) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

   $0\le|\sin\frac{1}{x}|\le 1$ より $0\le|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|$. $x\to 0$ のとき $|x|\to 0$ より $|\sin\frac{1}{x}|\to 0$.

   x の正負で場合分けを行って左右極限が 0 であることを示しているなら OK だが, x に条件をつけずに x で上から抑えている解答が多かった. これはいいかげん過ぎるので減点した.

   (c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$

   $n>2$ のとき $\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n}<2\cdot(\frac{2}{3})^{n-2}$. $\lim_{n\to\infty}(\dfrac{2}{3})^{n-2}=0$ より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

   考えやすいように分子を 2^n としたが, 任意の実数 a に対し $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ が成り立つ. これは, $|a|<k$ を満たす自然数 k をとり, $n!=(k-1)!\cdot k\cdot(k+1)\cdots n$ と分ければ全く同様に示せる.

2. $a_1>0$, $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}\quad(n\ge 1)$ により定義される数列 $\{a_n\}$ は, $a=\sqrt{1+a}, a>0$ を満たす a に収束することを示せ.

   $a_n, a>0$ より $|a_{n+1}-a|=|\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a}}<\frac{|a_n-a|}{2}<\cdots<\frac{|a_1-a|}{2^n}$. よって $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

3. $I=[0,1]$ とする. $f:I\to I$ が I 上連続なら, $f(x)=x$ を満たす $x\in I$ が存在することを示せ. (ヒント : $g(x)=f(x)-x$, 中間値の定理)

   $g(x)=f(x)-x$ とおくと, $0\le f(x)\le 1$ より $g(0)=f(0)\ge 0$, $g(1)=f(1)-1\le 0$. $g(0)=0$ ならば $f(0)=0$, $g(1)=0$ ($g(1)=1$ となっていましたが, 訂正しました) ならば $f(1)=1$. $g(0)\ne 0$, $g(1)\ne 0$ ならば $g(0)>0$, $g(1)<0$ より, 中間値の定理より, ある c $(0<c<1)$ が存在して $g(c)=0$. このとき $f(c)=c$.