レポート問題解答 (2011.7.5 出題)

次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

1. $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$

   $f_x=3x^2-3y$, $f_y=3y^2-3x$. $f_x=f_y=0$ より $(x,y)=(0,0),(1,1)$. $f_{xx}=6x$, $f_{yy}=6y$, $f_{xy}=-3$ より $D=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=9-36xy$.

   $(x,y)=(0,0)$ のとき $D=9>0$ より $(0,0)$ は極大でも極小でもない.

   $(x,y)=(1,1)$ のとき $D=-27<0$, $f_{xx}=6>0$ より $(1,1)$ で極小値 $f(1,1)=-1$.

2. $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ $(x,y\neq 0)$

   $f_x=y-\frac{1}{x^2}$, $f_y=x-\frac{1}{y^2}$. $f_x=f_y=0$ より $(x,y)=(1,1)$. $f_{xx}=\frac{2}{x^3}$, $f_{yy}=\frac{2}{y^3}$, $f_{xy}=1$ より $D=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=1-\frac{4}{x^3y^3}$.

   $(x,y)=(1,1)$ のとき, $D=-3<0$, $f_{xx}=2>0$ より $(1,1)$ で極小値 $f(1,1)=3$.

3. $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$

   $f_x=4x^3-4y$, $f_y=-4x+4y$. $f_x=f_y=0$ より $(x,y)=(0,0),(1,1),(-1,-1)$. $f_{xx}=12x^2$, $f_{yy}=4$, $f_{xy}=-4$ より $D=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=16-48x^2=16(1-3x^2)$. $(0,0)$ で $D=16>0$ より極大でも極小でもない. $(1,1)$, $(-1,-1)$ で $D=-32$, $f_{xx}=12>0$ より極小値 $f(1,1)=f(-1,-1)=-1$.

4. $f(x,y)=x^5-x^2y+y^2$ ($(0,0)$ の判定は, $f(x,0)$ を考えてみる.)

   $f_x=5x^4-2xy$, $f_y=2y-x^2$. $f_x=f_y=0$ より $(x,y)=(0,0),(\frac{1}{5},\frac{1}{50})$. $f_{xx}=20x^3-2y$, $f_{yy}=2$, $f_{xy}=-2x$ より $D=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}$ とおくと, $(\frac{1}{5},\frac{1}{50})$ で $D=-\frac{2}{25}<0$ で, $f_{xx}=\frac{3}{25}>0$ より極小値 $f(\frac{1}{5},\frac{1}{50})=-\frac{1}{12500}$.

   $(0,0)$ では $D=0$ なので判定できないが, $f(x,0)=x^5$ は $x=0$ のどんなに近くでも, 正, 負の値をとるので, 極大でも極小でもない.