レポート問題解答 (2011.7.12 出題)

学籍番号　　　　　　　　　氏名

1. 条件 $\phi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで, $f(x,y)=x^2+3xy+5y^2$ の最大値, 最小値を求めよ.

曲線 $\phi(x,y)=0$ は非特異, すなわち $\phi=0$ のとき $\mathrm{grad}\phi\neq(0,0)$ である. 極値を与える点の候補をラグランジュの未定乗数法により求める.

$f_x-\lambda\phi_x=0$, $f_y-\lambda\phi_y=0$ から λ を消去する.

$$f_x\phi_y-f_y\phi_x=(2x+3y)(2y)-(3x+10y)(2x)=-2(x+3y)(3x-y)=0$$

より $x=-3y$ または $y=3x$. $x=-3y$ のとき, $\phi(x,y)=0$ に代入して $10y^2=1$. よって $(x,y)=(\pm\frac{3}{\sqrt{10}},\mp\frac{1}{\sqrt{10}})$, このとき $f(x,y)=\frac{1}{2}$ (複号同順). $y=3x$ のとき, $\phi(x,y)=0$ に代入して $10x^2=1$. よって $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\pm\frac{3}{\sqrt{10}})$, このとき $f(x,y)=\frac{11}{2}$ (複号同順). 以上により, $f(x,y)$ は $(\pm\frac{3}{\sqrt{10}},\mp\frac{1}{\sqrt{10}})$ で極小かつ最小値 $\frac{1}{2}$ $(\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\pm\frac{3}{\sqrt{10}})$ で極大かつ最大値 $\frac{11}{2}$ をとる.

2. 条件 $\phi(x,y)=x^4+y^4-1=0$ のもとで, $f(x,y)=x^3+y^3$ の最大値, 最小値を求めよ.

曲線 $\phi(x,y)=0$ は非特異である.

$f_x-\lambda\phi_x=0$, $f_y-\lambda\phi_y=0$ から λ を消去する.

$$f_x\phi_y-f_y\phi_x=(3x^2)(4y^3)-(3y^2)(4x^3)=-12x^2y^2(y-x)=0$$

より $x=0$ または $y=0$ または $x=y$. これと $\phi(x,y)=0$ より 極値を与える候補は $(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm2^{-1/4},\pm2^{-1/4})$ (複号同順). $f(\pm1,0)=f(0,\pm1)=\pm1$, $f(\pm2^{-1/4},\pm2^{-1/4})=\pm2^{1/4}$ (複号同順) で, $1<2^{1/4}$ より, $(2^{-1/4},2^{-1/4})$ で極大かつ最大値 $2^{1/4}$, $(-2^{-1/4},-2^{-1/4})$ で極小かつ最小値 $-2^{1/4}$ をとる.

3. 条件 $\phi(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$ を満たす点の集合が, 有界であることを示せ. この条件のもとで, $f(x,y)=x^2+y^2$ の最大値, 最小値を求めよ.

$x=r\cos t$, $y=r\sin t$ とおく. $\phi(x,y)=r^4-2r^2\cos2t=r^2(r^2-2\cos2t)=0$ より, $r=0$ または $r^2=x^2+y^2=2\cos2t$. よって, $0\le r^2\le2$ なので, $\phi(x,y)=0$ を満たす点の集合は有界集合である. よって, $f(x,y)$ は, 極値を与える点または $\phi(x,y)=0$ の特異点において最大, 最小値をとる.

$f_x-\lambda\phi_x=0$, $f_y-\lambda\phi_y=0$ から λ を消去する.

$$f_x\phi_y-f_y\phi_x=2x(4y(x^2+y^2)+4y)-2y(4x(x^2+y^2-4x)=16xy=0$$

より $x=0$ または $y=0$.

$x=0$ のとき, $\phi(x,y)=0$ に代入して $y^4+2y^2=0$ より $y=0$.

$y=0$ のとき, $\phi(x,y)=0$ に代入して $x^4-2x^2=0$ より $x=0,\pm\sqrt{2}$.

$f(\pm\sqrt{2},0)=2$ である, また, $(x,y)=(0,0)$ は $\phi(x,y)=0$ の特異点 $\mathrm{grad}\phi(0,0)=(0,0)$ であり, $f(0,0)=0$. 最大値, 最小値はこれらの値となるので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(\pm\sqrt{2},0)$ で最大値 2, $(0,0)$ で最小値 0 をとる. 0 が最小であることは, 常に $f(x,y)\ge0$ であることからも分かる.

4. 条件 $\phi(x,y,z)=x+2y+3z-1=0$ のもとで, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ. 最小値を与える点は, どのような点か.

$f_x-\lambda\phi_x=2x-\lambda=0$, $f_y-\lambda\phi_y=2x-2\lambda=0$, $f_z-\lambda\phi_z=2z-3\lambda=0$ より $x=\frac{\lambda}{2}$, $y=\frac{2\lambda}{2}$, $z=\frac{3\lambda}{2}$. これを $\phi=0$ に代入して, $\frac{14\lambda}{2}=1$. よって $\lambda=\frac{1}{7}$, $(x,y,z)=(\frac{1}{14},\frac{1}{7},\frac{3}{14})$.

この点において $f(x,y,z)$ は極小かつ最小となる. これは, シュワルツの不等式により, $\phi=0$ のとき

$$1=|x+2y+3z|^2\le(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)=14f(x,y,z)$$

すなわち $f(x,y,z)\ge\frac{1}{14}$ が成り立ち, $(x,y,z)=(\frac{1}{14},\frac{1}{7},\frac{3}{14})$ で等号が成り立つことからわかる. この点は, 原点と平面 $\phi=0$ 上の点の距離の 2 乗の最小値を与えている. すなわち, この点は原点からこの平面に下ろした垂線の足である.