レポート問題解答 (2011.4.26 出題)

1. $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$ を示せ.

   $y = \cos^{-1} x$ とおくと $x = \cos y$ かつ定義より $0 \le y \le \pi$. $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$ で, $0 \le y \le \pi$ より $\sin y \ge 0$ だから $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. すなわち $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ である.

2. $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$ $(-1 \le x \le 1)$ を示せ.

   $y_1 = \cos^{-1} x$, $y_2 = \cos^{-1}(-x)$ $(0 \le y_1, y_2 \le \pi)$ とおくと, $x = \cos y_1$, $-x = \cos y_2$. よって, $x = \cos y_1 = -\cos y_2 = \cos(\pi - y_2)$ で $0 \le y_1, \pi - y_2 \le \pi$ より, $\cos x$ の $[0, \pi]$ での単調性より $y_1 = \pi - y_2$. すなわち $y_1 + y_2 = \pi$.

3. $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ を示せ.

   $y_1 = \tan^{-1} \frac{1}{2}$, $y_2 = \tan^{-1} \frac{1}{3}$ $(0 < y_1, y_2 < \frac{\pi}{2})$ とおくと, 加法定理より $\tan(y_1 + y_2) = 1$. $0 < y_1 + y_2 < \pi$ より $y_1 + y_2 = \frac{\pi}{4}$.

4. 次の式を微分せよ.

   (a) $x^{(x^x)}$

   $(x^x)' = (e^{x \log x})' = (x \log x)' e^{x \log x} = (\log x + 1) x^x$.
   $(x^{(x^x)})' = (e^{x^x \log x})' = (x^x \log x)' e^{x^x \log x} = ((\log x + 1) x^x \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}) x^{(x^x)} = ((\log x + 1) \log x + \frac{1}{x}) x^x x^{(x^x)}$.

   (b) $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   $(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ より $(\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   (c) $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   $(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})' = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

   (d) $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$

   $(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x)' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}$.

1., 2., 3. で, 逆三角関数の値の範囲に言及しなかったり, 範囲が甘いと結論が出せなくなる.