練習問題 解答 (2011.5.10 出題)

1. $\frac{x}{x^2-1}$ の n 階導関数を求めよ.

$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1})$ より

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

部分分数分解が計算できたと思ったら, 検算は当然すべきであろう.

2. $f(x) = \tan^{-1} x$ に対し $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ より $(1+x^2)f'(x) = 1$. これを n 階 $(n \geq 2)$ 微分すると $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$. $x = 0$ とすると $f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ $(n \geq 2)$. $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ より $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)} = (-1)^m(2m)!$.

$(-1)^m$ ではなく単にマイナスをつけている間違いが散見された. ほとんどできているのにもったいない.

3. 次の極限値を求めよ.

(a) $\lim\limits_{x\to+0} x^a \log x \quad (a > 0)$

$x^a \log x = \frac{\log x}{x^{-a}}$. $a > 0$ より $x \to +0$ のとき $\frac{\infty}{\infty}$ 型である.
$\frac{(\log x)'}{(x^{-a})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} = -\frac{x^a}{a} \to 0$ $(x \to +0)$ だから, ロピタルの定理より $\lim\limits_{x\to+0} x^a \log x = 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \log \dfrac{x-a}{x+a}$

$x \log \frac{x-a}{x+a} = \frac{\log \frac{x-a}{x+a}}{\frac{1}{x}}$. $\frac{0}{0}$ 型である. $\frac{(\log \frac{x-a}{x+a})'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{2a}{x^2-a^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2ax^2}{x^2-a^2} \to -2a$ $(x \to \infty)$ だから, ロピタルの定理より $\lim\limits_{x\to\infty} x \log \dfrac{x-a}{x+a} = -2a$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

$\frac{0}{0}$ 型である. $\frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = \frac{1 + \tan^2 x - 1}{1 - \cos x} = \frac{\tan^2 x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} \to 2$ $(x \to 0)$ だから, ロピタルの定理より $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\log \cos x}{x^2}$. $\frac{0}{0}$ 型である. $\frac{(\log \cos x)'}{(x^2)'} = \frac{-\tan x}{2x} \to -\frac{1}{2}$ $(x \to 0)$ だから, ロピタルの定理より $\lim\limits_{x\to 0} \log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = -\dfrac{1}{2}$. よって $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.