レポート問題解答 (2011.5.17 出題)

1. 以下の関数の $x=0$ におけるテイラー展開を, 指定された次数 n まで求めよ. 剰余項は R_{n+1} としてよい.

   (a) $f(x)=\tan x,\ n=3$
   $f'(x)=1+\tan^2 x,\ f''(x)=2\tan x+2\tan^3 x,\ f'''(x)=2+8\tan^2 x+6\tan^4 x$ より $f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=2$. よって
   $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+R_4$

   (b) $f(x)=\sinh x,\ n=4$
   $f'(x)=\cosh x,\ f''(x)=\sinh x,\ f'''(x)=\cosh x,\ f^{(4)}(x)=\sinh x$ より $f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=1,\ f^{(4)}(0)=0$. よって
   $\sinh x = x+\frac{x^3}{6}+R_5$

   (c) $f(x)=\cos^3 x,\ n=4$
   $f'(x)=-3\cos^2 x\sin x,\ f''(x)=-3\cos^3 x+6\cos x\sin^2 x,\ f'''(x)=21\cos^2 x\sin x-6\sin^3 x,$ $f^{(4)}(x)=-60\cos x\sin^2 x+21\cos^3 x$, より $f'(0)=0,\ f''(0)=-3,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=21$. よって
   $\cos^3 x = 1-\frac{3x^2}{2}+\frac{7x^4}{8}+R_5$
   あるいは, 3 倍角公式より $\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$. $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+R_5$ より $\cos 3x = 1-\frac{9}{2}x^2+\frac{27}{8}x^4+S_5$ (S_5 は剰余項) だから $\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x) == 1-\frac{3x^2}{2}+\frac{7x^4}{8}+\frac{1}{4}(R_5+3S_5)$ としても得られる.

   (d) $f(x)=e^{x^2},\ n=4$
   $f'(x)=2xf(x),\ f''(x)=(4x^2+2)f(x),\ f'''(x)=(8x^3+12x)f(x),\ f^{(4)}(x)=(16x^4+48x^2+12)f(x)$, より $f'(0)=0,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=12$. よって
   $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+R_5$

2. (a) $f(x)=(1+x)^{1/3}$ の $x=0$ におけるテイラー展開を 2 次まで展開し, 剰余項 R_3 も計算せよ.
   $f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3},\ f''(x)=-\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3},\ f'''(x)=\frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$ より $f(x)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+R_3,\ R_3=\frac{5}{81}(1+\theta x)^{-8/3}x^3$.

   (b) (a) の結果を用いて, $(1.05)^{1/3}$ の近似値を誤差 10^{-5} 以内で求めよ. $x=0.05=\frac{1}{20}$ のとき $R_3<\frac{5}{81}\frac{1}{20^3}=\frac{1}{129600}<10^{-5}$ より, 近似値として $1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20}-\frac{1}{9}\frac{1}{400}=\frac{3659}{3600}(=1.016388\cdots)$ をとれば誤差は 10^{-5} 以内となる.