

レポート問題解答 (2011.5.24 出題)

1.  $f(x)$  が  $x = a$  の近くで二階微分可能で,  $f''(x)$  が  $x = a$  で連続とするとき次を示せ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

テイラーの定理より

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a + \theta_1 h)h^2,$$

$$f(a+(-h)) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{1}{2}f''(a + \theta_2(-h))h^2$$

を満たす  $\theta_1, \theta_2$  ( $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ ) が存在する. 辺々加えて

$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = \frac{1}{2}(f''(a + \theta_1 h) + f''(a - \theta_2 h))h^2.$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $a + \theta_1 h \rightarrow a, a - \theta_2 h \rightarrow a$  で,  $f''(x)$  が  $x = a$  で連続より  $f''(a + \theta_1 h) \rightarrow f''(a), f''(a - \theta_2 h) \rightarrow f''(a)$ . よって  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$ .

- $f(a+h), f(a-h)$  に対する  $\theta$  は一般に異なるので, 違う記号で表示しなければならない.
- $f''(x)$  が  $x = a$  で連続より  $f(a \pm h) = f(a) \pm f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)$  は正しい. これより  $f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = f''(a)h^2 + o(h^2)$  だが, その後「 $o(h^2) \rightarrow 0$  より」は間違いで「 $o(h^2)/h^2 \rightarrow 0$  より」が正しい.
- 極限をとる前の式  $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$  は 2 階微分  $f''(a)$  を近似する式になっているので, 微分方程式の解の数値計算において, 2 階微分のかわりに用いられることがある.

2. 一般二項展開により次を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}x^4 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

一般二項展開より

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} C_n x^n.$$

$$-\frac{1}{2} C_0 = 1, -\frac{1}{2} C_1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} C_n = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \text{ より}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

$x$  に  $-x^2$  を代入して

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

3.  $f(x)$  が  $C^n$  級するとき, テイラー展開

$$f(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + R_n \quad (1)$$

の剰余項  $R_n$  は

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \quad (2)$$

と書けることを示せ.

$n = 1$  のとき, 微分積分学の基本定理により  $R_1 = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$ . (仮定により  $f'(x)$  が連続だから, 右辺の積分が意味を持つ.) 右辺は証明すべき式 (2) で  $n = 1$  とおいたものより,  $n = 1$  で OK.  $n - 1$  まで OK とする:

$$f(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} (x-a)^{n-2} + R_{n-1}, \quad R_{n-1} = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) dt \quad (3)$$

(3)において、 $f(x)$  が  $C^n$  なら  $f^{(n-1)}(x)$  は  $C^1$  なので、部分積分できて

$$R_{n-1} = \left[ -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) \right]_a^x - \int_a^x \left( -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) f^{(n)}(t) dt = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

よって、

$$f(x) = f(a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

となり、 $f(x) - (f(a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1}) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$  が成り立つ。左辺は  $R_n$  なので  $\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = R_n$ . よって、数学的帰納法によりすべての  $n$  に対して OK.

$R_n$  は  $R_n = f(x) - (f(a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1})$  により定義される値であり、これが問題文のような積分で表されることを示せという問題であるが、何が事実 (仮定) で何を示そうとしているのか判然としない解答が結構多い。「書き方の問題」と書かれている人は、上の解答をよく読んで、どこが問題なのか考えてほしい。