レポート問題解答 (2011.6.7 出題)

学籍番号　　　　　　　　氏名

1. $(x,y) \to (0,0)$ のとき、次の関数の極限値があればそれを求めよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと $u(x,y) = r\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. $(x,y) \to (0,0)$ のとき $r \to 0$ で, $\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ は有界だから $u(x,y) \to 0$.

あるいは, $\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = sin\theta\cos 2\theta$ より $|\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)| \leq 1$. よって $|u(x,y)| \leq |r|$ だから $r \to 0$ より $u(x,y) \to 0$.

一般に $f(x,y) \to 0$ は, $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ と上から抑えて, $g(x,y) \to 0$ に帰着させて示す. 単に $f(x,y)$ を上から抑えるだけでは, 下が開いているのでダメ.

(2) $g(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$t = x^2+y^2$ とおくと,

$$g(x,y) = \frac{1-\cos t}{t} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cdot \sin\frac{t}{2}.$$

$(x,y) \to (0,0)$ のとき $t \to 0$ で, このとき $\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \to 1$, $\sin\frac{t}{2} \to 0$ より $g(x,y) \to 0$.

2. $u = \dfrac{x\cos\alpha - y\sin\alpha}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{x\sin\alpha + y\cos\alpha}{x^2+y^2}$ に対して $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ を計算せよ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)\cos\alpha - 2x(x\cos\alpha - y\sin\alpha)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(-x^2+y^2)\cos\alpha + 2xy\sin\alpha}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\cos\alpha - 2y(x\sin\alpha + y\cos\alpha)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2-y^2)\cos\alpha - 2xy\sin\alpha}{(x^2+y^2)^2}$$

より $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

3. $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ $(0 < t)$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を計算せよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}xe^{-\frac{x^2}{4t}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{4}t^{-\frac{5}{2}})e^{-\frac{x^2}{4t}},\ \frac{\partial f}{\partial t} = (-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{4}t^{-\frac{5}{2}})e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

より $\dfrac{\partial f}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

4. 次の $u(x,y)$ に対して $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(1) $u(x,y) = e^{ax-by}\cos(bx+ay)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{ax-by}(-2ab\sin(bx+ay) + (a^2-b^2)\cos(bx+ay))$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{ax-by}(2ab\sin(bx+ay) - (a^2-b^2)\cos(bx+ay))$ より $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(2) $u(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ より $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(3) $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ より $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.