

1. C^2 級関数 $f(x, t)$ が $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を満たすとする ($c \in \mathbf{R}$ は 0 でない定数). (「0 でない」が抜けていました.)

(a) 変数変換 $u = x - ct$, $v = x + ct$ の逆変換を求めよ. すなわち (x, t) を (u, v) で表せ.
 $x = \frac{u+v}{2}$, $t = \frac{v-u}{2c}$

(b) $z = f(x, t)$ を u, v の関数とみるとき, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ を求めよ.
 $z = f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c})$ とすると

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2} f_x \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) + \frac{1}{2c} f_t \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right).$$

以下, 引数 $(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c})$ は省略する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2c} f_t \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} f_{xx} - \frac{1}{2c} f_{xt} \right) + \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{2} f_{tx} - \frac{1}{2c} f_{tt} \right) \\ &= \frac{1}{4} (f_{xx} - \frac{1}{c^2} f_{tt}) + \frac{1}{4c} (f_{tx} - f_{xt}) \end{aligned}$$

$f_{xt} = f_{tx}$, $f_{tt} = c^2 f_{xx}$ より $z_{vu} = 0$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ は $\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$ ではなく, $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)$ を意味することに注意する.

2. 関数 $z = f(x, y)$ を C^2 級とし, $a, b \in \mathbf{R}$ を $a^2 + b^2 = 1$ を満たす定数とする. 変数変換 $x = au + bv$, $y = -bu + av$ により z を (u, v) の関数とも見なすとき, 次の問に答えよ.

(a) z_u, z_v を z_x, z_y で表せ.

$$z_u = az_x - bz_y, z_v = bz_x + az_y.$$

(b) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$ であることを示せ.

$$\frac{\partial}{\partial u} z_u = a(az_{xx} - bz_{xy}) - b(az_{yx} - bz_{yy}) = a^2 z_{xx} - 2abz_{xy} + b^2 z_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} z_v = b(bz_{xx} + az_{xy}) + a(bz_{yx} + az_{yy}) = b^2 z_{xx} + 2abz_{xy} + a^2 z_{yy}$$

$$(f \text{ が } C^2 \text{ より } z_{xy} = z_{yx}). \text{ よって } a^2 + b^2 = 1 \text{ より } z_{uu} + z_{vv} = (a^2 + b^2)(z_{xx} + z_{yy}) = z_{xx} + z_{yy}.$$

3. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする.

(a) (r, θ) を (x, y) で表せ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

(b) 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$, 積 AB を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(x, y) から (r, θ) への対応, およびその逆の対応は, 平面から平面への写像で, 互いに逆写像となっている. 行列 A, B はそれぞれの写像のヤコビ行列と呼ばれるもので, AB が単位行列となることは, 逆写像のヤコビ行列が, もとの写像のヤコビ行列の逆行列になっていることを示しており, これが 1 変数の逆関数の微分の一般化になっている. $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ が $\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \theta}}$ などとはならないことに注意する.