レポート問題解答 (2011.6.21 出題)

学籍番号　　　　　　　　氏名

1. $f(x,y) = x\log(1-y)$ の $(0,0)$ におけるテイラー展開を 2 次の項まで求めよ. 剰余項は R_3 でよい.

   $f_x = \log(1-y)$, $f_y = x\cdot\frac{1}{y-1}$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = \frac{1}{y-1}$, $f_{yy} = -x\cdot\frac{1}{(y-1)^2}$ より $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yy}(0,0) = 0$. $f(h,k) = \frac{1}{2}(-2hk) + R_3 = -hk + R_3$.

2. $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ で定まる x の陰関数 y について, y', y'' を求めよ. 陰関数の存在が保証されない点はどこか.

   $F_x = 2x + y$, $F_y = x + 2y$ より, $y' = -\frac{Fx}{Fy} = -\frac{2x+y}{x+2y}$. $y'' = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3} = -\frac{6}{(x+2y)^3}$. 陰関数の存在が保証されないのは $F = F_y = 0$ となる点である. これを解くと, $(x,y) = (\mp\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$.

3. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ で定義される x の陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.

   $F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ とおくと, $F_x = 3x^2 + 2x$, $F_y = -2y$. $y' = -\frac{F_x}{F_y} = 0$ より $3x^2 + 2x = 0$. よって $x = 0, -\frac{2}{3}$. $x = 0$ のとき $y = 0$ となり $F_y = 0$ となるので $(0,0)$ 不適. $x = -\frac{2}{3}$ のとき $y = \pm\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

   $F_x = 0$ のとき $y'' = -\frac{F_{xx}}{F_y} = -\frac{6x+2}{-2y} = \frac{3x+1}{y}$ である.

   $(x,y) = (0, +\frac{2}{9}\sqrt{3})$ で $y'' = -\frac{1}{y} < 0$ より極大, $(x,y) = (0, -\frac{2}{9}\sqrt{3})$ で $y'' = -\frac{1}{y} > 0$ より極小.

4. $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ で定義される x の陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.

   $F(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$ とおくと, $F_x = 4x^3 - 4y$, $F_y = 4y^3 - 4x$. $y' = -\frac{F_x}{F_y} = 0$. $F = F_x = 0$ を解く. $F_x = 0$ より $y = x^3$. これを $F = 0$ に代入して, $x^4 - 4x^4 + x^{12} = 0$. $x^4(x^8 - 3) = 0$ より $x = 0, \pm 3^{\frac{1}{8}}$.

   $x = 0$ のとき $y = 0$ となり, $F_y(0,0) = 0$ より不適.

   $F_x = 0$ のとき $y'' = -\frac{F_{xx}}{F_y}$ で, $F_{xx} = 12x^2$ より $y'' = -\frac{3x^2}{y^3 - x}$.

   $x = 3^{\frac{1}{8}}$ のとき, $y = 3^{\frac{3}{8}}$. $y'' = -\frac{3^{\frac{9}{8}}}{2}$ より極大.

   $x = -3^{\frac{1}{8}}$ のとき, $y = -3^{\frac{3}{8}}$. $y'' = \frac{3^{\frac{9}{8}}}{2}$ より極小.