レポート問題解答 (2011.6.28 出題)

1. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で定義される曲線上の点 (a,b) $(a\neq 0, b\neq 0)$ における接線の方程式を求めよ.
$F(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-1$ とおくと, $F_x=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $F_y=-\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ より (a,b) における接線の方程式は $-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}(x-a)-\frac{2}{3}b^{-\frac{1}{3}}(y-b)=0$. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=1$ より $a^{-\frac{1}{3}}x+b^{-\frac{1}{3}}y=1$.

2. 次の 2 変数関数が表す曲面の, 指示された点における接平面の方程式を求めよ.
   (a) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, 点 $(0,0,0)$
   $z_x=\cos x+\cos(x+y)$, $z_y=\cos y+\cos(x+y)$ より $(0,0,0)$ における法線ベクトルは $(z_x,z_y,-1)=(2,2,-1)$. よって接平面の方程式は $2x+2y-z=0$.
   (b) $z=ax+by+c$ $(a,b,c$ は実定数), 点 (x_0,y_0,ax_0+by_0+c)
   $z_x=a$, $z_y=b$ より (x_0,y_0,ax_0+by_0+c) における法線ベクトルは $(z_x,z_y,-1)=(a,b,-1)$. よって接平面の方程式は $a(x-x_0)+b(y-y_0)-(z-(ax_0+by_0+c))=0$. 整理すると $z=ax+by+c$. すなわちこの曲面自身が接平面となる.

3. (a) $xy+yz+zx=1$ で定義される曲面は滑らかであることを示せ.
   $F(x,y,z)=xy+yz+zx-1$ とおくと, $F_x=y+z$, $F_y=x+z$, $F_z=y+x$. $F_x=F_y=F_z=0$ を解くと $x=y=z=0$ となるが, $(0,0,0)$ はこの曲面上の点ではない. よってこの曲面は滑らかである.

   $y+z=0$, $x+z=0$ より $x=y$. $y+x=0$ より $x=-y$. これらは矛盾すると書いた人がかなりいたが, 別に矛盾しない. これらより $x=y=0$ が得られ, $z=0$ を得るが, これらが $F(x,y,z)=0$ を満たさないので, $F_x=F_y=F_z=0$ となる曲面上の点が存在しないということである.
   (b) この曲面上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めよ.
   接平面の方程式は $(b+c)(x-a)+(a+c)(y-b)+(b+a)(z-c)=0$ である. $ab+bc+ca=1$ を使えば

   $(b+c)x+(a+c)y+(b+a)z=2$.

4. $x^2+y^2+z^2=1$ で定義される曲面上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めよ.

   $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ とおくと, $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_y=2y$ より, (a,b,c) における接平面の方程式は, $2a(x-a)+2b(y-b)+2c(z-c)=0$. $a^2+b^2+c^2=1$ を使えば $ax+by+cz=1$. これは, 球面上の点における接平面は, 半径方向に垂直であることを示している.