レポート問題 (2011.5.24)

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

1. $f(x)$ が $x=a$ の近くで二階微分可能で, $f''(x)$ が $x=a$ で連続とするとき次を示せ.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

(ヒント: 2 次の剰余項つきテイラー展開により $f(a+h)$, $f(a-h)$ を表し, $f''(x)$ の連続性を使う.)

2. 一般二項展開により次を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad (|x|<1)$$

ただし, $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 1$, $(2n)!!=(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2=2^n n!$ である. (ヒント: $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ を一般二項展開して x に $-x^2$ を代入.)

3. $f(x)$ が C^n 級のとき, テイラー展開

$$f(x) = f(a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

の剰余項 R_n は

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

と書けることを示せ. (ヒント : n まで OK として, R_n の積分表示を部分積分してみる. $f(x)$ が C^{n+1} 級ならば部分積分できる. $n=1$ のときのチェックも忘れずに.)