レポート問題 (2011.6.14)

学籍番号　　　　　　　　　氏名

1. C^2 級の関数 $f(x,t)$ が $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を満たすとする ($c \in \mathbf{R}$ は定数).

   (a) 変数変換 $u = x - ct$、$v = x + ct$ の逆変換を求めよ. すなわち (x,t) を (u,v) で表せ.

   (b) $z = f(x,t)$ を u, v の関数とみるとき, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ を求めよ. ($z = f(x(u,v), t(u,v))$ と見て, 連鎖公式を適用する.)

2. 関数 $z = f(x,y)$ を C^2 級とし, $a, b \in \mathbf{R}$ を $a^2 + b^2 = 1$ を満たす定数とする. 変数変換 $x = au + bv,\ \ y = -bu + av$ により z を (u,v) の関数とも見なすとき, 次の問に答えよ.

   (a) $z_u,\ z_v$ を $z_x,\ z_y$ で表せ. (これも, 1. の (b) と同様に計算する.)

(b) $z_{xx}+z_{yy}=z_{uu}+z_{vv}$ であることを示せ. (ヒント: 右辺を連鎖公式で計算して z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy} で表す. $\frac{\partial}{\partial u}z_x(au+bv,-bu+av)=z_{xx}(au+bv,-bu+av)\cdot a+z_{xy}(au+bv,-bu+av)\cdot(-b)$ である. z_{xu} などを残したまま計算するのは意味不明.)

3. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ($r>0$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$) とする.

(a) (r,θ) を (x,y) で表せ. (ヒント: 例えば $r=\frac{x}{\cos\theta}$ などとするのは θ が残っているので間違い. θ については $\frac{y}{x}$ を考えよ.)

(b) 行列 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$, 積 AB を計算せよ.