

数学とコンピュータ 2011 (第 15 回) Maple, GeoGebra

野呂 正行 (理学研究科数学専攻)

2012.2.2

1 Maple

1.1 起動方法

Doc (下方のアイコンが並んでいるところ) に Maple (カエデの葉のアイコン) が登録されていればそれをシングルクリックする. もしなければアプリケーションフォルダの中から探して起動する.

1.2 入力方法

- cfep と同様, 式の末端には必ずセミコロン ; を置く.
- 多項式を入力する場合, x^n は x^n , 積 ab は $a*b$ と入力する. 入力すると, 表示が自動的に x^n , $a \cdot b$ のように変更される (以下の不等号も同様).
- $x^n + x^m$ などを入力する場合, x^n と入力した後, \rightarrow を打つ必要がある. 打たないと x^{n+x^m} のようになってしまう.
- 等号は $=$, 不等号は $<$, $<=$, $>$, $>=$ と入力する.
- 「等しくない」は $!=$ と入力する.
- 関数定義は $f(x) := x^3 - 3*x + 1$; などと入力するとダイアログが出るので function definition を選ぶ.
- 右辺の式を, 左辺の変数に格納するには $:=$ を使う.
- コピーペーストする場合, ペーストした後に Enter を打つ.

2 Maple+SyNRAC で不等式を解く

2.1 SyNRAC のダウンロード

1. SyNRAC を Google で検索する.
2. 「SyNRAC:富士通研究所」から SyNRAC をダウンロードする.
3. 展開してできたフォルダ `synrac` をデスクトップに置く.
4. `synrac` 中の `synrac_start.mw` をダブルクリックする.

2.2 練習

授業で示した例を実際に QE で解かせてみる。現在の版はバグがあるので、ときどきエラーが起きる（現在対処をお願いしています）。

大学入試問題の求解

```
u:=Ex([y,z],And(x+y+z=3,x*y+y*z+z*x=-9));
qe(u);
f(x):=x^3+3*x^2-9*x;
u:=All([x,y],Impl(And(y<x,x<a),f(x)>((x-y)*f(a)+(a-x)*f(y))/(a-y)));
qe(u);
u:=Ex(x,And(a>0,y=a*(x-(1+1/a))^2,x>=0,x<=2));
qe(u);
```

2.3 課題

「 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の相異なる 3 つの実数解を a, b, c ($a < b < c$) とするとき、 $g(x) = x^2 - 2$ とおけば $g(a) = c$, $g(b) = a$, $g(c) = b$ 」を一階述語論理式に変換せよ。これが真であることを QE で確認せよ。

3 Maple 上でのグレブナー基底計算

3.1 基本的な使い方

Groebner パッケージを読み込んで、グレブナー基底を計算する。

グレブナー基底の計算

```
with(Groebner);
J:=[x+y+z-1,x*y+z^2-x*y*z-2,x^2+y^3+z^4-3];
G:=Basis(J,plex(x,y,z));
```

この例の場合、グレブナー基底は

$$\{g(z), 154y + f(z), 154x + h(z)\}$$

という形をしているので、解は $g(z) = 0$ の解 α により

$$(x, y, z) = \left(-\frac{f(\alpha)}{154}, -\frac{h(\alpha)}{154}, \alpha\right)$$

と書ける。

3.2 根号を含んだ式の簡単化

グレブナー基底を使って、 $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ のような計算を自動的に行うことができる。

```
J:=[x^3-3,y^2-5,(x+2*y)*z-1];
G:=Basis(J,plex(z,x,y));
```

これを実行すると

$$[y^2 - 5, x^3 - 3, 60 + 400x + 3x^2 - 800y - 6xy - 40x^2y + 7991z]$$

という結果が得られる. 元の入力イデアル J は $x = 3^{\frac{1}{3}}, y = 5^{\frac{1}{2}}, z = \frac{1}{x+2y}$ を表している. 計算結果によれば

$$z = -\frac{60 + 400x + 3x^2 - 800y - 6xy - 40x^2y}{7991}$$

なので, 結局

$$\frac{1}{3^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{40 \cdot 3^{\frac{2}{3}} 5^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} - 400 \cdot 3^{\frac{1}{3}} + 800 \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 60}{7991}$$

3.3 課題

上の例にならって, $\alpha = 3^{\frac{1}{3}}, \beta = 2^{\frac{1}{2}}$ に対し, $\frac{1}{\alpha-\beta}$ の分母を有理化せよ. (手でやってもよいし, Maple を使ってもよい. 結果は α, β の多項式として書けばよい.)

4 GeoGebra で遊ぶ

4.1 GeoGebra のダウンロード

1. GeoGebra を Google で検索する.
2. 日本語サイトへ行く.
3. Webstart (安定版) をダウンロードする.
4. GeoGebra アイコン (または geogebra.jnlp) をダブルクリックする.

4.2 使用法, 練習

授業用ページにある「GeoGebra の使い方」を参照して下さい. まず, 練習として三角形の外接円を描いてみる

こと.

やってみるとおもしろい例: 放物線の焦点の作図, テイラー展開, フーリエ級数など.

4.3 課題

三角形の内接円を GeoGebra で作図する手順を記せ. 三角形を動かしても内接したままでいるように作図すること. (内接円の中心は, 角の二等分線の交点だが, 内接円を作図するにはもう一手間必要である.)