

レポート問題解答 (2011.11.10 出題)

1. 9^{100} を 7 で割った余りを求めよ.

$$9 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$9^2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$9^4 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$9^8 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$9^{16} \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$9^{32} \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$9^{64} \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7}.$$

よって

$$9^{100} = 9^{64+32+4} \equiv 2 \cdot 4 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7}.$$

2. 整数 a, b, c に対し, $A \equiv a \pmod{3}$, $A \equiv b \pmod{5}$, $A \equiv c \pmod{7}$ を満たす整数 A を一つ求め, a, b, c で表せ. ($5, 7$ で割り切れ, 3 で割ると 1 余る数 A_3 , $3, 7$ で割り切れ, 5 で割ると 1 余る数 A_5 , $3, 5$ で割り切れ, 7 で割ると 1 余る数 A_7 を求める.)

$$A_3 = x \cdot 5 \cdot 7 = 35x \text{ と置くと } A_3 \equiv 1 \pmod{3} \text{ より } 35x \equiv 2x \equiv 1 \pmod{3}. \text{ よって } x = 2, A_3 = 70.$$

$$A_5 = y \cdot 3 \cdot 7 = 21y \text{ と置くと } A_5 \equiv 1 \pmod{5} \text{ より } 21y \equiv y \equiv 1 \pmod{5}. \text{ よって } y = 1, A_5 = 21.$$

$$A_7 = z \cdot 3 \cdot 5 = 15z \text{ と置くと } A_7 \equiv 1 \pmod{7} \text{ より } 15z \equiv z \equiv 1 \pmod{7}. \text{ よって } z = 1, A_7 = 15.$$

$$\text{よって } A = aA_3 + bA_5 + cA_7 = 70a + 21b + 15c \text{ とおけばよい.}$$