

レポート問題解答 (2012.12.22 出題)

$f(x) = x^2 + 168x + 5535$ とする.

1. $f(x) \equiv (x + a_1)(x + b_1) \pmod{5}$ を満たす a_1, b_1 ($0 \leq a_1, b_1 \leq 4$) を求めよ.

$f(x) \equiv x^2 + 3x \pmod{5}$ より $f(x) \equiv x(x + 3) \pmod{5}$. よって $a_1 = 0, b_1 = 3$ ととれる.

2. 上の a_1, b_1 に対し $f(x) \equiv (x + a_1 + 5a_2)(x + b_1 + 5b_2) \pmod{25}$ を満たす a_2, b_2 ($0 \leq a_2, b_2 \leq 4$) を求めよ.

$$f(x) \equiv x^2 + 18x + 10 \pmod{25},$$

$$(x + 0 + 5a_2)(x + 3 + 5b_2) \equiv x^2 + (3 + 5(a_2 + b_2))x + 5 \cdot 3a_2 \pmod{25}$$

より

$$3 + 5(a_2 + b_2) \equiv 18 \pmod{25},$$

$$15a_2 \equiv 10 \pmod{25}.$$

よって

$$a_2 + b_2 \equiv 3 \pmod{5},$$

$$3a_2 \equiv 2 \pmod{5}.$$

これらを解くと $a_2 = 4, b_2 = 4$.

3. 上の a_1, b_1, a_2, b_2 に対し $f(x) \equiv (x + a_1 + 5a_2 + 25a_3)(x + b_1 + 5b_2 + 25b_3) \pmod{125}$ を満たす a_3, b_3 ($0 \leq a_3, b_3 \leq 4$) を求めよ.

$$f(x) \equiv x^2 + 43x + 35 \pmod{125},$$

$$(x + 0 + 5 \cdot 4 + 25a_3)(x + 3 + 5 \cdot 4 + b_3) \equiv x^2 + (43 + 25(a_3 + b_3))x + 460 + 25(23a_3 + 20b_3) \pmod{125},$$

より

$$43 + 25(a_3 + b_3) \equiv 43 \pmod{25},$$

$$460 + 25(23a_3 + 20b_3) \equiv 35 \pmod{125}.$$

よって

$$a_3 + b_3 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$3a_3 \equiv 3 \pmod{5}.$$

これらを解くと $a_3 = 1, b_3 = 4$.

4. $f(x)$ を因数分解せよ.

3. より

$$f(x) \equiv (x + 45)(x + 123) \pmod{125}$$

が分かるが、右辺の積を計算すると $f(x)$ に等しいので

$$f(x) = (x + 45)(x + 123).$$