

種々の数学ソフトウェア

野呂 正行

神戸大学理学研究科数学専攻

January 16, 2014

今日の授業の内容

いくつかの数学ソフトについて紹介する.

- Maple
汎用, 有料
- Maxima
汎用, 無料
- GeoGebra
初等幾何, 簡単な数式, グラフ描画, 無料
- その他
Knoppix/Math およびそれに含まれるいくつかのソフト

Maple

- 汎用の数学ソフト

数値計算から数式計算, グラフ描画まで, 機能が豊富
学生からプロまで対応

例: 微積分の勉強なら Student[Calculus1] パッケージ

- フリーではない

比較的高価: 個人購入だと 30 万円以上 (学生版は 2 万円)

大学全体でサイトライセンスを取得 ⇒ 大学内で自由に使える

Maple の使用法

- 起動方法

Doc に Maple (カエデの葉のアイコン) が登録されていればそれをシングルクリックする.

もしなければアプリケーションフォルダの中から探して起動する.

- 入力方法

- cfep と同様, 式の末端には必ずセミコロン ; を置く.
- 積 ab は $a*b$, べき x^n は x^n と入力.
- $x^n + x^m$ などを入力する場合, x^n と入力した後, \rightarrow を打つ必要がある. 打たないと x^{n+x^m} のようになってしまう.

● 入力方法 (つづき)

- 等号は =, 不等号は <, <=, >, >= と入力する.
- 「等しくない」は != と入力する.
- 関数定義は $f(x) := x^3 - 3*x + 1;$ などと入力するとダイアログが出るので function definition を選ぶ.
- 右辺の式を, 左辺の変数に格納するには := を使う.
- コピーペーストする場合, ペーストした後に Enter を打つ.

Maple : 微分, 積分

- $f'(x), f''(x), \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$
`diff(f, x), diff(f(x), x, x), diff(f, x, x, y, y)`
- 簡単化は自分でする
`simplify(f)`
- $\int f(x)dx$
`int(f, x)`

```
f:=diff(log(sqrt((1-cos(x))/(1+cos(x))))),x);
```

...

```
g:=simplify(f);
```

1

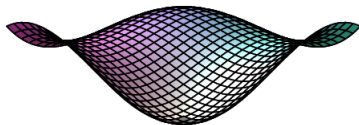
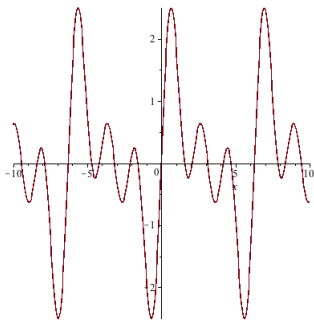
sin(x)

```
h:=int(g,x);
```

ln(csc(x)-cot(x))

Maple : 関数のグラフ

```
plot(sin(x)+sin(2*x)+sin(3*x),x=-10..10);  
plot3d(x^3+y^3-3*x*y,x=-5..5,y=-5..5);
```



Maple : SyNRAC の使用

- ① SyNRAC を Google で検索する.
- ② 「SyNRAC:富士通研究所」から SyNRAC をダウンロードする.
- ③ 展開してできたフォルダ `synrac` をデスクトップに置く.
- ④ `synrac` の中の `synrac_start.mw` をダブルクリックする.

Maple : SyNRAC への一階述語論理式の入力

- $P_1 \vee P_2 \vee \dots$ は $Or(P_1, P_2, \dots)$
- $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots$ は $And(P_1, P_2, \dots)$
- $\neg P$ は $Not(P)$
- $P \rightarrow Q$ は $Impl(P, Q)$ (implication)
- $\exists x_1 \exists x_2 \dots P$ は $Ex([x_1, x_2, \dots], P)$
- $\forall x_1 \forall x_2 \dots P$ は $All([x_1, x_2, \dots], P)$
- 述語 P に対する QE の実行は $qe(P)$

Maple : SyNRAC による問題求解例

問題

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする. $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対し, $f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$ が成り立つような a の範囲を求めよ.

解

```
f(x) := x^3 + 3*x^2 - 9*x;  
u := All([x, y], Impl(And(y < x, x < a),  
  f(x) > ((x - y) * f(a) + (a - x) * f(y)) / (a - y)));  
qe(u);
```

Maple : グレブナー基底の計算

```
with(Groebner);  
b:=[x^2+y*z+x*y-1,y^2+x*z+y*z-1,z^2+x*y+x*z-1];  
ord:=plex(x,y,z);  
Basis(b,ord);
```

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 8 \\ [1 - 9 z^2 + 27 z^4 - 30 z^6 + 9 z^8, \\ & \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 7 \\ 35 z^3 - 189 z^5 + 273 z^7 - 90 z^7 + y, \\ & \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 7 \\ 20 z^3 - 105 z^5 + 141 z^7 - 45 z^7 + x] \end{aligned}$$

Maxima

- **フリーな数学ソフト**
もとは MIT のプロジェクト (1968 スタート; 旧名称 Macsyma)
かつては 商用 (100 万円以上)
⇒ Maxima としてオープンソース化
- **代数をベースにしたシステム**
多項式因数分解, 初等函数の不定積分 etc.
- **Windows 版, Linux 版, Mac 版が入手可能**
maxima.sourceforge.net からインストールファイルをダウンロードして実行する.
Windows : wxMaxima がおすすめ.
- **入門書**
maxima-note.pdf がおすすめ. (ググれば見つかる.)

Maxima の使用法

- $+$, $-$, $*$ (積), $/$, $^$ (ベキ), $!$ (階乗) が使える
- コマンドの終端は ; (出力表示) か \$ (表示なし)
- 実行は Shift+Enter

```
(%i1) 2^100;
```

```
(%o1)          126765060022822...
```

```
(%i2) 100!;
```

```
(%o2) 93326215443944152681699...
```

- 整数は, 許される限りいくらでも大きい値が使える
- 分数は, 既約分数で保持される

Maxima : 式の計算

- 展開を指示しない限り, 入力のまま保持される

```
(%i5) (x+y)^2;
```

2

```
(%o5) (y + x)
```

- 代入は : で行う (=, := ではない)

```
(%i6) expand((x+y)^2);
```

2 2

```
(%o6) y + 2 x y + x
```

```
(%i7) x:(y+z^2-2)^3;
```

2 3

```
(%o7) (z + y - 2)
```

```
(%i8) u:expand(x);
```

6 4 4 2 2

```
(%o8) z + 3 y z - 6 z + 3 y z - ...
```

- Q 上一変数および多変数の因数分解

```
(%i74) factor(x^20-1);
```

```
(%o74) (x - 1) (x + 1) (x + 1)  
         4 3 2           8 6 4 2  
(x +x +x +x+1) (x -x +x -x +1)
```

因子の既約性は保証されている

Maxima : 微分

- $f'(x), f^{(n)}(x), \partial^{m+n} f / \partial x^m \partial y^n$
diff(f(x), x), diff(f(x), x, n),
diff(f(x, y), x, m, y, n) (メニューでは 微積分 → 微分)
- $x = a$ における微分係数
subst(a, x, diff(f(x), x))
- 簡単化は自分でする

```
(%i2) f:diff(log(sqrt((1-cos(x))/(1+cos(x))))), x);
```

```
(%o2) ...
```

```
(%i3) g:ratsimp(f);
```

```
(%o3)
```

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x) - 1}$$

Maxima : 積分

```
(%i34) integrate(sin(log(x)),x);
      x (sin(log(x)) - cos(log(x)))
(%o34) -----
              2
(%i35) integrate(1/log(x),x);
      /
      [ 1
(%o35) I ----- dx (できないのでそのまま返した)
      ] log(x)
      /
(%i36) integrate(sqrt(1-x^2),x,0,1);
      %pi
(%o36) ---
      4
(%i37) integrate(exp(-x^2),x,-inf,inf);
(%o37)  sqrt(%pi)
```

%pi は π , inf は ∞ を表す.

Maxima : Help

- わからないことは help に聞く
? の後ろの空白を忘れない
- 選択肢の番号を入力すればよい

```
(\%i57) ? integrate
```

```
0: integrate :(maxima.info)Definitions ...
```

```
1: integrate_use_rootsof :Definitions ...
```

```
Enter space-separated..., all' or 'none': 0
```

```
-- Function: integrate (<expr>, <x>) ...
```

KNOPPIX/Math

- KNOPPIX

Klaus Knopper (ドイツ) が作成, 配布している Live Linux CD/DVD

Live Linux : Windows PC に CD/DVD をセットし再起動すると, 別の OS (Linux) が起動 (Windows の HDD には影響なし)

- KNOPPIX/Math

濱田 (福岡大), 高山, 野呂 (神戸大) らが KNOPPIX 上に数学ソフトを多数追加した DVD を作成, 配布

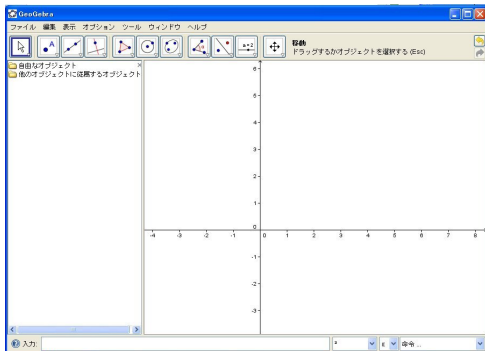
- USB にインストールして起動できる (便利)
- Windows, Mac 上の仮想マシンとしても使える (便利)
- Maxima, GeoGebra (後述) はインストール済み

GeoGebra

- GeoGebra = Geometry (幾何) + Algebra (代数)
幾何, 代数 微積分を結びつけた数学ソフトウェア
学校で使うことを目的に作られている
- ウェブから簡単に起動できる.
Java が入っていれば Windows, Macintosh, Linux 上どこでも OK. (今日は Linux (KNOPPIX/Math) 上で使用.)
- 図形, グラフが簡単に描ける
描かれた図形の移動, 変形も容易
- パラメタに依存するグラフが書ける.
スライダーを使ってグラフを変形できる.
- 簡単な数式の計算ができる.
多項式, 指数, 対数, 三角関数, 微分, 積分 ...

GeoGebra の起動


- 1 GeoGebra を Google で検索
- 2 日本語サイトへ行く
- 3 ウェブスタート → WebStart
- 4 ファイル geogebra.jnlp をデスクトップに保存
- 5 保存した geogebra.jnlp をダブルクリック



GeoGebra の基本操作

- ツールボタン：メニューバーの下のボタンの列



ボタンの右下の  :プルダウンサブメニューがある
サブメニューのうち、選択されているものが前面に見える。
ている。

- 点を打つ



を選び、好きな場所を (左) クリックする

- 2 点を通る直線



を選び、2 回クリックする。

- 三角形を描く



を選び、3 点をクリックしたあと最初の点をクリッ
クする。

GeoGebra の基本操作

- ある直線の, ある点を通る垂線を引く



を選び, 直線, 点をクリックする.

- 図形を移動する.



を選ぶ.

- 三角形の内部をクリックしてドラッグ
- 三角形の頂点をクリックしてドラッグ
- 2点 A, B を通る直線の, A, B 以外をクリックしてドラッグ
- 2点 A, B を通る直線の, A または B をクリックしてドラッグ

「三角形」, 「垂線」等の性質を保持したまま移動することがわかる.

例 1 : 三角形の外接円

三角形の外心 (外接円の中心) は, 各辺の垂直二等分線の交点である.

1. 三角形を描く

2. 各辺の垂直二等分線を引く



のサブメニューにある.

3. 垂直二等分線の二本を選び, 交点を作る



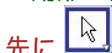
のサブメニューにある.

4. 交点を中心とし, 三角形のどれかの頂点を通る円を描く



を選ぶ.

5. 三角形の頂点を動かしてみる.



先に をクリックしてから.

例 2 : n 次関数のグラフ (スライダーを使う)

1. スライダーつき変数を作る



を選び, 適当な場所をクリックするとダイアログが出る → 適用を押す (変数 a ができる)
もう一つ作る (変数 b ができる)

2. 入力フィールドに $y=x^3+a*x+b$ と入力する.

現在の a, b の値を使った 3 次関数のグラフが描かれる.

3. a, b のスライダーを動かすとグラフが変化する.

4. スライダーをもっと増やして, 高次関数のグラフの形をみる.

例 3 : 放物線の焦点

1. 放物線 $y=a*x^2$ を描く (a はスライダー).
2. x 軸上に点を打ち, x 軸に垂線を引く.
点は x 軸の上のみを動ける.
3. 引いた垂線と放物線の交点を作る.
4. 交点における, 放物線への接線を引く.
左から 4 つめのサブメニューにある.
5. 最初に引いた x 軸への垂線の, 接線に関する鏡映を引く.
右から 3 つめのサブメニューにある.
6. 最初に打った点を動かしてみる.
最後に引いた鏡映の直線は, ある一点を常に通る.
これはなにを意味するだろうか.

例 4 : 微分係数

1. $f(x) = x^2$ のグラフを描く

入力フィールドに (あるいは) と入力する.

2. グラフ上に 上に点 A, B をとる



を選び、グラフ上でクリックする.

3. 点 A, B を通る直線を引く.

4. 直線の傾きを求める.

右から 5 つめのサブメニューにある.


直線をクリックすれば傾きが出る.

5. 点 B を A に近づけてみる.

直線がある直線に近づく → これが接線

傾きが一定値に近づく → これが微分係数

例 5 : 導関数

1. スライダーつき変数を作る (右から 2 つめの  を選ぶ)
適当な場所をクリックするとダイアログが出る → 適用を押す (変数 a ができる)
2. $f(x) = x^3 - x$ のグラフを描き, グラフ上に点 A をとる
入力フィールドに $f(x) = x^3 - x$ あるいは $f(x) = x^3 - x$ と入力する.
入力フィールドに $(a, f(a))$ と入力する.
3. 点 A を通る $y = f(x)$ の接線を引く. (左から 4 つめのサブメニュー)
点をクリック → グラフをクリック.
4. 接線の傾きを求める. (右から 5 つめのサブメニュー)
5. 点 (a, m) を打つ. (m は傾きが入っている変数)
入力フィールドに (a, m) と入力する.
6. a を動かすと点が動く.
これが導関数 → どのような関数のグラフか?

例 6 : 三角関数のテイラー展開

テイラー展開 = 関数を多項式関数で近似すること

高校の微積分 (数 III) のすぐ先にある

1. 0 以上 30 まで, 整数のみを動くスライダーを作る.
ダイアログで, 範囲を 0 から, 増分を 1 にする.
2. 入力フィールドに $y=\sin(x)$ と入力する.
 $y = \sin x$ のグラフが表示される.
3. 入力フィールドに テイラー多項式 $[\sin(x), 0, a]$ と入力する.
右下の三角を押してコマンドメニューを出して, 貼り付けることも可能.
4. スライダーを動かす
グラフが $\sin x$ のグラフに近づく様子を見る.

例 7 : 三角級数 (フーリエ級数)

上矢印で, 前に入れたコマンドが編集できることに注意する.

1. 入力フィールドに $\sin(x)$, $\sin(x)+\sin(2x)/2$, ... を順に入力してグラフを書いてみる.
どうなっていくか.
2. 0 以上 50 まで, 整数のみを動くスライダーを作る.
3. 入力フィールドに $\text{Sum}[\text{Sequence}[\sin(n*x)/n, n, 1, a]]$ と入力する.
何が表示されるか? スライダーを動かすとどうなるか?
4. $\text{Sum}[\text{Sequence}[\sin(n*x)/n, n, 1, a, 2]]$ と入力する.
これは, 奇数番目のみの和となる. (2 は n の増分)
何が表示されるか? スライダーを動かすとどうなるか?

その他の数学ソフトウェア

KnoppixMath に収録されている.

- surfex : 3 変数多項式の零点の描画
拡大縮小, 回転, パラメタの変更
- R : 統計処理ソフト
著名な統計処理ソフト S 言語と類似
多数のパッケージ, 解説書がある
- $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$: 数式を含む文書作成
D. E. Knuth (数学者) が, 自身の著作物 (The Art of Computer Programming) を組版するために開発した.
この授業の資料や問題も $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ で作成している.

例

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

次回 (1/23) : K501 で実習

- Maple (SyNRAC), GeoGebra を実際に使う.
今日説明した例を実際に入力してみる.
- 簡単な問題を解く.
SyNRAC による不等式制約問題の求解.
グレブナー基底による方程式求解.
GeoGebra による作図.