

# 数学とコンピュータ 2013 (第 15 回) Maple, GeoGebra

野呂 正行 (理学研究科数学専攻)

2014.1.23

## 1 課題について

本文中の課題は別紙で配布する。1/31(金)までに K 棟 2 階のレポート入れに提出すること。

注意：暗号解読と今回の課題の提出は単位取得には必須です。

## 2 Maple

### 2.1 起動方法

Doc (下方のアイコンが並んでいるところ) に Maple (カエデの葉のアイコン) が登録されていればそれをシングルクリックする。もしなければアプリケーションフォルダの中から探して起動する。

### 2.2 入力方法の注意

- cfep と同様, 式の末端には必ずセミコロン ; を置く.
- 多項式を入力する場合,  $x^n$  は  $x^n$ , 積  $ab$  は  $a*b$  と入力する. 入力すると, 表示が自動的に  $x^n$ ,  $a \cdot b$  のように変更される (以下の不等号も同様).
- $x^n + x^m$  などを入力する場合,  $x^n$  と入力した後,  $\rightarrow$  を打つ必要がある. 打たないと  $x^{n+x^m}$  のようになってしまう.
- 等号は  $=$ , 不等号は  $<$ ,  $<=$ ,  $>$ ,  $>=$  と入力する.
- 「等しくない」は  $!=$  と入力する.
- 関数定義は  $f(x) := x^3 - 3*x + 1$ ; などと入力するとダイアログが出るので function definition を選ぶ.
- 右辺の式を, 左辺の変数に格納するには  $:=$  を使う.
- コピーペーストする場合, ペーストした後に Enter を打つ.

### 3 Maple+SyNRAC で不等式を解く

#### 3.1 SyNRAC のダウンロード

1. SyNRAC を Google で検索する.
2. 「SyNRAC:富士通研究所」から SyNRAC をダウンロードする.
3. 展開してできたフォルダ `synrac` をデスクトップに置く.
4. `synrac` 中の `synrac_start.mw` をダブルクリックする.

#### 3.2 練習

授業で示した例を実際に QE で解かせてみる.

大学入試問題の求解例

```
f(x):=x^3+3*x^2-9*x;  
u:=All([x,y],Impl(And(y<x,x<a),f(x)>((x-y)*f(a)+(a-x)*f(y))/(a-y)));  
qe(u);
```

#### 3.3 課題

$f(x) = 8x^3 - 6x + 1$  とする.

1. 「 $f(x) = 0$  の任意の解  $x$  に対し,  $2x^2 - 1$  も  $f(x) = 0$  の解である」を一階述語論理式に変換せよ. これが真であることを QE で確認せよ.
2. 1 により,  $f(x) = 0$  の相異なる 3 つの実数解を  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) とするとき,  $2a^2 - 1, 2b^2 - 1, 2c^2 - 1$  は  $a, b, c$  のいずれかに等しい. これらがそれぞれ  $a, b, c$  のどれに等しいか, QE で探せ.

2 のヒント: たとえば  $2a^2 - 1$  が  $a$  と等しいかどうかは「 $a < b$  かつ  $b < c$  かつ  $f(a) = 0$  かつ  $f(b) = 0$  かつ  $f(c) = 0$  ならば  $a^2 - 2 = a$ 」が真かどうか調べればよい.

参考:  $b = \cos \frac{2}{9}\pi, c = \cos \frac{4}{9}\pi, a = \cos \frac{8}{9}\pi$  である.

### 4 Maple 上でのグレブナー基底計算

#### 4.1 基本的な使い方

Groebner パッケージを読み込んで, グレブナー基底を計算する.

```
with(Groebner);
J:=[x+y+z-1,x*y+z^2-x*y*z-2,x^2+y^3+z^4-3];
G:=Basis(J,plex(x,y,z));
```

この例の場合、グレブナー基底は

$$\{g(z), 154y + f(z), 154x + h(z)\}$$

という形をしているので、解は  $g(z) = 0$  の解  $\alpha$  により

$$(x, y, z) = \left(-\frac{f(\alpha)}{154}, -\frac{h(\alpha)}{154}, \alpha\right)$$

と書ける.

## 4.2 課題

1. 連立代数方程式  $\begin{cases} xz + x + y - 2 = 0 \\ x^2 - yz - y - 1 = 0 \\ xy - yz - xz + 1 = 0 \end{cases}$  の解を、多項式  $f(z), g(z), h(z)$  を求めて  $\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \\ h(z) = 0 \end{cases}$  の形に表せ.

2. 1 の  $h(z)$  は一次式の積に分解する. これを用いて, 1 の方程式の解をすべて求めよ.

## 5 GeoGebra を使ってみる

### 5.1 GeoGebra の起動

(前回の資料の手順は古いものでした. 以下の手順に従ってください.)

1. Google Chrome を起動する.
2. GeoGebra を Google で検索する.
3. 日本語サイト (GeoGebra 日本) へ行く.
4. GeoGebra Web Application をクリックする.

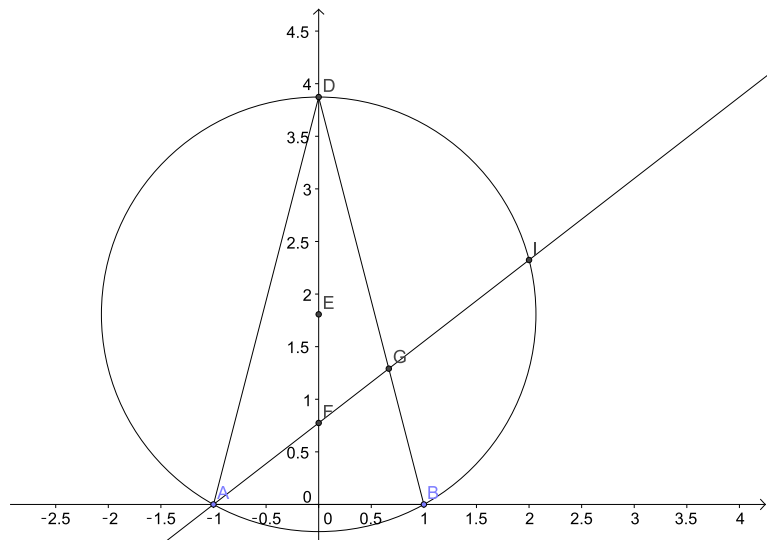
### 5.2 使用法, 練習

現在提供されているインターフェースは英語版なので, メニューもすべて英語である. よく使うものについて対応表をつけておく.

Intersect	交点
Segment	線分
Perpendicular line	垂線
Perpendicular bisector	垂直二等分線
Angle bisector	角の二等分線
Tangents	接線
Polygon	多角形
Circle with center through point	中心と円周上の1点で決まる円
Angle	角度
Area	面積

練習として、次の作図を手順に従って行う。

1. 点 A(-1,0), B(1,0) を打つ。
2. 点 A を中心として半径 4 の円を描く。
3. 円と y 軸の交点を求める。y 座標が正の交点を D とする。左のビューの円の方程式のボタンをクリックして円を消しておく。
4. 線分 AB, AD, BD を引く。
5. AD の垂直二等分線と y 軸の交点 E を求める。E は  $\triangle ABD$  の外心である。
6.  $\triangle ABD$  の外接円を描く。
7.  $\angle DAB$  の二等分線を引く。
8. 上の二等分線と y 軸, BD, 円との交点で A でない方を順に F, G, I とする。



この図で、例えば AG の長さを求めてみる。まず、Options → Rounding → 5 Decimal digits で小数第 5 位まで表示するよう設定する。すると AG は、Segment のところに例えば  $h=2.10819$  と表示されるが、これではどんな数がよくわからない。しかし、実は  $AG = \sqrt{\quad}$  (  $\quad$  は整数 ) という形であることが分かっている。すると次のような方法で  $AG$  が計算できる。

1.  $AG^2$  を計算すると、4.44444 と表示される。
2.  $4.44444 = \frac{40}{9}$  と考えられるので、 $AG = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$

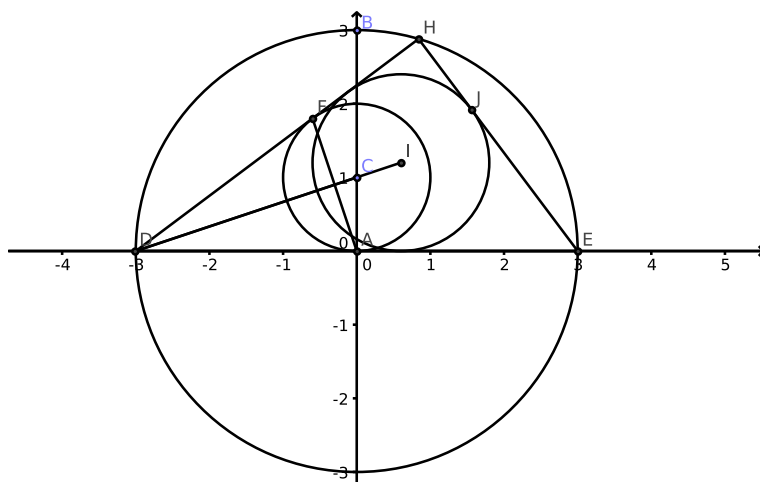
また、他の例として、 $\triangle ABG$  と  $\triangle DGI$  の面積比を求めてみる。これは、Polygon コマンドでそれぞれの三角形を定義すると、 $\text{poly1}=1.29099$ ,  $\text{poly2}=2.06559$ ,  $\text{poly1}/\text{poly2}=0.625$  が得られるが、これも比が  $\frac{5}{8}$  となることが分かっている。この場合、 $\frac{5}{8}$  であることが分かる。(もちろん厳密な論理に基づいてはいないが、穴埋め式の問題ではこのような解法も可能であろう。)

### 5.3 課題

1. 三角形の内接円を GeoGebra で作図する手順を記せ. 三角形を動かしても内接したままでいるように作図すること. (内接円の中心は, 角の二等分線の交点だが, 内接円を作図するにはもう一手間必要である.)
2. (a)  $A(0,0)$  を中心とし,  $B(0,3)$  を通る円 ( $c$  とする) を描く.  
 (b)  $C(0,1)$  を中心とし, 点  $A$  を通る円 ( $d$  とする) を描く.  
 (c)  $x$  軸と円  $c$  の交点  $D, E$  を求める.  
 (d) 点  $D$  から円  $d$  へ接線を引け. 2 本の接線のうち 点  $A$  を通らない方を  $b$  とする.  
 (e) 直線  $b$  と円  $d$  との接点を  $F$  とする.  
 (f) 直線  $b$  と円  $c$  の交点のうち,  $D$  と異なる方を  $H$  とする.  
 (g)  $\triangle DEH$  の内心を  $I$  とする.

以下の量を作図により求めよ. 自分の作図と点の名前が異なっている場合は, 右の図と対応させて読み替えること.

- (a)  $CD = \sqrt{\quad}$
- (b)  $AF = \frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$
- (c)  $\cos \angle EDH = \frac{\quad}{\quad}$
- (d)  $DH = \frac{\quad}{\quad}$
- (e)  $\triangle DEH$  の面積 =  $\frac{\quad}{\quad}$
- (f)  $\triangle DEH$  の内接円の半径 =  $\frac{\quad}{\quad}$
- (g)  $DI = \frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$



### 5.4 まとめと注意

1. Options → Rounding で小数点以下 5 桁を選んでおく.
2. 接線ツール, 線分ツール, 交点ツール, 角の二等分線ツール, 垂線ツールなどを駆使する.
3. 例えば  $CD$  を結ぶ線分を作ると自動的に長さが出る. 三角形の面積も同様である.
4. 作図しなくても自明に求まる量もあるが, その場合には実測値と比較して答え合わせができる.
5. 数値はすべて小数で表示されるが, 設問により平方すると分数になることが分かる場合には, 数値を二乗して得た小数を分数に直せば, その平方根として答えが分かる.
6. 途中で保存する場合は, File → Save As でファイル名を指定して ggb ファイルのダウンロードを選ぶ. 保存したファイルは File → Open でロードできる.