

解答例 (2013.10.17 出題)

1. 699 と 432 の最大公約数を計算せよ.

$$699 = 1 \cdot 432 + 267$$

$$432 = 1 \cdot 267 + 165$$

$$267 = 1 \cdot 165 + 102$$

$$165 = 1 \cdot 102 + 63$$

$$102 = 1 \cdot 63 + 39$$

$$63 = 1 \cdot 39 + 24$$

$$39 = 1 \cdot 24 + 15$$

$$24 = 1 \cdot 15 + 9$$

$$15 = 1 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

より $\text{GCD}(699, 432) = 3$.

2. 隣り合う二つの正の整数は互いに素である. これはなぜか?

隣り合う二つの正整数を $n+1, n$ ($n > 0$) とすれば

$$n+1 = 1 \cdot n + 1 \text{ より } \text{GCD}(n+1, n) = \text{GCD}(n, 1) = 1.$$

3. 2 以上の正の整数 a が素数でなければ, 2 以上 \sqrt{a} 以下の約数を持つことを示せ.

a が素数でないなら, $a = bc$, $b \geq 2$, $c \geq 2$ を満たす整数 b, c が存在する. もし $b > \sqrt{a}$ かつ $c > \sqrt{a}$ なら, 辺々かけて $bc > a$ となるがこれは $bc = a$ より矛盾. よって $b \leq \sqrt{a}$ または $c \leq \sqrt{a}$ より題意を満たす.