問題解答 (2014.1.9 出題)

1. 次の命題を一階述語論理式に変換せよ.

   「a, b, c は実数とし, $a < b$ とする. 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$, $\mathrm{C}(c, c^2)$ が, 辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする. このとき, $b - a \geq 2$ が成り立つ.」

   A, B, C が直角三角形なら「常に」なので, 減量子は $\forall$ である. CA, CB が直交するという条件は $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a - c, a^2 - c^2)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (b - c, b^2 - c^2)$ の内積が 0, すなわち $(a - c)(b - c) + (a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0$ と書ける. よって, 求める一階述語論理式は

   $\forall a \forall b \forall c((a < b \wedge a \neq c \wedge b \neq c \wedge (a-c)(b-c)+(a^2-c^2)(b^2-c^2) = 0) \to b-a \geq 2)$

   $a < b$ より $a \neq b$ なので $a \neq b$ は省略した. また, $(a - c)(b - c) \neq 0$ より, 最後の条件を $(a - c)(b - c)$ で割ると

   $\forall a \forall b \forall c((a < b \wedge a \neq c \wedge b \neq c \wedge 1 + (a + c)(b + c) = 0) \to b - a \geq 2)$

   となって, より見やすくなる.

2. $\forall n \forall x \forall y \forall z(n$ は整数 $\wedge\ x$ は整数 $\wedge\ y$ は整数 $\wedge\ z$ は整数 $\wedge\ n \geq 3 \wedge xyz \neq 0 \to x^n + y^n \neq z^n)$ を普通の言い方で言い換えよ. この命題は真か偽か?

   「直訳」すると,

   「x, y, z を 0 でない整数, n を 3 以上の整数とするとき, $x^n + y^n \neq z^n$」

   より普通の言い方では

   「n を 3 以上の整数とするとき, $x^n + y^n = z^n$ は 0 でない整数解を持たない」

   これはフェルマーの最終定理で Wiles により真であることが証明された.

3. 命題 「コネがあれば就職できる」の否定命題はなにか.

   P:「コネがある」ならば Q:「就職できる」$=(\neg P) \vee Q$ なので, 否定は $P \wedge \neg Q$, すなわち「コネがある」かつ「就職できない」. もう少し自然な日本語で書くと, 「コネがあるのに就職できない」か.