2013年度前期 線形代数学1 中間試験解答例および講評 (2013.5.23 実施)

1. (5+10=15点)

   (a) n 次正方行列 A が逆行列をもつことの定義を述べよ.

   解) n 次正方行列 B が存在して $AB = BA = E$ をみたすとき, A は逆行列をもつという. このとき B を A の逆行列といい, A^{-1} であらわす.

   講評) $AB = E$ だけのものや, 「A を行基本変形して単位行列になる」という解答は, 数学的には正しいが「定義」としてはふさわしくないので減点した.

   (b) P, Q, R をそれぞれ $n \times n$, $m \times m$, $m \times n$ 行列とし, P, Q が逆行列をもつとき, $A = \begin{bmatrix} P & O \\ R & Q \end{bmatrix}$ は逆行列をもつ. A^{-1} を求めよ.

   解) $B = \begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}$ とおくと

$$AB = \begin{bmatrix} P & O \\ R & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PS & PT \\ RS + QU & RT + QV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

   より $PS = E$, $PT = O$. P が逆行列をもつので

$$S = P^{-1}, T = O.$$

   $RT + QV = QV = E$ で Q が逆行列をもつので

$$V = Q^{-1}.$$

   $RS + QU = RP^{-1} + QU = O$ より

$$U = -Q^{-1}RP^{-1}, B = \begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ -Q^{-1}RP^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

   これは確かに $BA = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$ もみたす.

   講評) 行列の積の左右に無頓着な解答が散見された. また, 行列に対して $\frac{RP^{-1}}{Q}$ というような書き方はありえない. (Q^{-1} を右からかけたのか左からかけたのかわからない.)

2. (15点) 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 1 & 7 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解) 拡大係数行列 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & 7 & 13 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & 7 & 4 \end{array}\right]$ は行基本変形により $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ に変形される. 方程式に戻すと

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 = 3 \end{cases}$$

で, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 - 5x_4 - 2x_5 + 5 \\ -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + 3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ただし, x_3, x_4, x_5 は任意.

講評) 標準的な方法ではき出し, 標準的な方法で解を構成するだけなのだが, それができない人が少なからずいるのには驚いた. また, 「x_3, x_4, x_5 は任意」と書かないと解の表示としては不十分である.

3. (10+5=15 点) 次の連立一次方程式が解をもつ条件およびその場合の解を求めよ. (解は自由変数および b のみを用いて表せ.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

解) 拡大係数行列 $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right]$ は行基本変形により $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a-2b \end{array}\right]$ に変形される. よって解をもつための必要十分条件は $1 - a - 2b = 0$ すなわち

$$a = 1 - 2b.$$

このとき変形された方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 - b \\ x_2 - x_3 = 2b - 1 \end{cases}$$

より解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + 1 - b \\ x_3 + 2b - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - b \\ 2b - 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ただし, x_3 は任意.

講評) x_2, x_3 が任意と書いていないための減点以外はよくできていた.

4. (10+10=20 点) 次の連立方程式が自明でない解を持つ条件を求め, その場合の解も求めよ.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ を行基本変形して $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$ を得る.

$a = 1$ **のとき** 上の行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に等しい. 方程式に戻すと

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

となり, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ただし, x_2, x_3 は任意.

$a \neq 1$ **のとき** 第 2 行, 第 3 行を $a - 1 (\neq 0)$ で割って, さらに行基本変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$ を得る.

$a = -2$ **のとき** 上の行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に等しい. 方程式に戻すと

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

となり解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ただし, x_3 は任意.

$a \neq 1$**,** $a \neq -2$ **のとき** 第 3 行を $a + 2 (\neq 0)$ で割ってさらに行基本変形すると単位行列となるので解は自明解のみ.

講評) 場合分けが不十分で解が半分しか出ない人が少しいた.

5. (5+5+5=15 点) 次の行列の階数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

解) 行基本変形により $\begin{bmatrix}1 & a & a & 1\\ 0 & 1-a & 0 & a-1\\ 0 & 0 & 1-a & a-1\\ 0 & 1-a^2 & 1-a^2 & 0\end{bmatrix}$ を得る.

$a=1$ **のとき** 上の行列は $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ となるので $\mathrm{rank}(A)=1$.

$a\neq 1$ **のとき** 第 2, 3, 4 行を $1-a(\neq 0)$ で割ってさらに行基本変形すると $\begin{bmatrix}1&0&0&1+2a\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&2(1+a)\end{bmatrix}$ を得る.

$a=-1$ **のとき** 上の行列は $\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ となるので $\mathrm{rank}(A)=3$.

$a\neq 1$**,** $a\neq -1$ **のとき** 第 4 行を $1+a(\neq 0)$ で割ってさらに行基本変形すると単位行列となるので $\mathrm{rank}(A)=4$.

講評) 前問題と同様場合分けが甘い人が少しいた.

6. (15 点) 逆行列を求めよ.

$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\-1&0&0&-2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

解) $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\1&0&1&1\\-3&1&-2&-1\\-1&0&-1&0\end{bmatrix}$

講評) ほとんどの人ができていた.

7. (10+10=20 点) A を $m\times n$ 行列, E を m 次単位行列とする.

(a) $AB=E$ をみたす $n\times m$ 行列 B が存在するとき, 任意の $b\in\mathbf{R}^m$ に対し $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=b$ は解を持つことを示せ. (したがって $\mathrm{rank}(A)=m$(証明不要).)

解) $c=Bb$ とおけば, $Ac=A(Bb)=(AB)b=Eb=b$ より c は $Ax=b$ の解.

(b) $\mathrm{rank}(A)=m$ のとき, $AB=E$ をみたす $n\times m$ 行列 B が存在することを示せ.

解) 任意の $b\in R^m$ に対し

$$m=\mathrm{rank}(A)\leq\mathrm{rank}([A|b])\leq m$$

(最後の不等号は $[A|b]$ が $m \times (n+1)$ 行列だから) より

$$\mathrm{rank}([A|b]) = \mathrm{rank}(A)$$

が成り立つから, $Ax = b$ は任意の b に対し解をもつ. 特に $i = 1, \ldots, m$ に対し $Ax = e_i$ (ただし e_i は 標準基底ベクトル) の解を b_i とし, $B = [\, b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m \,]$ とおけば B は $n \times m$ 行列で,

$$AB = [\, Ab_1 \quad Ab_2 \quad \cdots \quad Ab_m \,] = [\, e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_m \,] = E.$$

講評) 点が出たのが 4 名, (a), (b) 正解が 1 名だった. (a) で A の逆行列を持ち出す人がかなりいたが, そもそも $m \neq n$ の場合には逆行列は意味をなさない.

この問題の結果により, $m \times n$ 行列 A に対し, $AB = E$ をみたす $n \times m$ 行列 B が存在することと, $\mathrm{rank}(A) = m$ が同値であることがわかる. 系として, $m > n$, すなわち A が縦長なら $AB = E$ をみたす B は存在しないことがわかる. (これ自体の証明はもっと簡単 : もしこのような B があれば, B は横長なので $Bx = 0$ は非自明解 $x = c$ をもつ. すると $(AB)c = Ec = c \neq 0$ だが, $(AB)c = A(Bc) = A0 = 0$ となり矛盾)