

練習問題 1 解答 (2013.4.18 出題)

1. $A^t A = {}^t A A$ かつ ${}^t A \neq A$ をみたく 2 次正方行列 A を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{とおくと } {}^t A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{より } A^t A = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}, {}^t A A = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

よって $A^t A = {}^t A A$ より $b^2 = c^2$ かつ $ac + bd = ab + cd$. ${}^t A \neq A$ より $b \neq c$. よって $b^2 = c^2$ より $c = -b$, $ac + bd = ab + cd$ より $b(a - d) = 0$. $b \neq 0$ より $a = d$. よって $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ ($b \neq 0$).

2. A, B, P をそれぞれ $n \times n, m \times m, n \times m$ 行列とし, A, B が逆行列をもつとき, $X = \begin{bmatrix} A & P \\ O & B \end{bmatrix}$ は逆行列をもつ. この逆行列を求めよ.

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} Q & R \\ S & T \end{bmatrix} \text{とおくと } XX^{-1} = \begin{bmatrix} AQ + PS & AR + PT \\ BS & BT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} \text{より } BS = O. B^{-1}$$

を左からかけて $S = O$. よって $AQ = E$ より $Q = A^{-1}$. $BT = E$ より $T = B^{-1}$. $AR + PT = O$ より $R = -A^{-1}PB^{-1}$. よって $X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}PB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$.

3. (a) 正方行列 A が $A^3 = O$ をみたくとき, 正整数 k に対し $(E + A)^k = E + kA + \frac{k(k-1)}{2}A^2$ であることを示せ.

$k = 1$ のとき両辺とも $E + A$ より OK. k まで正しいとすると, $(E + A)^{k+1} = (E + kA + \frac{k(k-1)}{2}A^2)(E + A) = (E + kA + \frac{k(k-1)}{2}A^2) + (A + kA^2) = E + (k+1)A + \frac{k(k+1)}{2}A^2$ となり $k+1$ でも正しい.

- (b) $X = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくととき X^k を計算せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{とおくと } X = E + A \text{ で, } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = O \text{ より } X^k =$$

$$E + kA + \frac{k(k-1)}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & ka & ka^2 \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k(k-1)}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ka & \frac{k(k+1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$