練習問題解答 (2013.6.27 出題)

$i=\sqrt{-1}$ とする.

1. $a_1=\begin{bmatrix}1\\ i\\ 1+i\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}1+i\\ 0\\ i\end{bmatrix}$, と直交する $\mathbf{C^3}$ のベクトル $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ を一つ求めよ.

$(a_1,x)=0$ より $1\cdot x_1+(-i)\cdot x_2+(1-i)\cdot x_3=0$. $(a_2,x)=0$ より $(1-i)\cdot x_1+0\cdot x_2+(-i)\cdot x_3=0$. よって $A=\begin{bmatrix}1 & -i & 1-i\\ 1-i & 0 & -i\end{bmatrix}$ とおくと $Ax=0$. 基本変形により A は $\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1-i}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2}\end{bmatrix}$ に変形できるので $Ax=0$ の解は $x=x_3\begin{bmatrix}-\frac{1-i}{2}\\ -\frac{1+i}{2}\\ 1\end{bmatrix}$ (x_3 は任意.) たとえば $x_3=2$ とおけば $x=\begin{bmatrix}-1+i\\ -1-i\\ 2\end{bmatrix}$ は a_1, a_2 と直交する.

2. $U=\begin{bmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ 1-i & 1\end{bmatrix}$ とする.

(a) U^*U を計算せよ.

$U^*=\begin{bmatrix}\frac{1-i}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1-i}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ より $U^*U=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(b) $U^{-1}AU$ を計算せよ.

(a) より $U^{-1}=U^*$ だから $U^{-1}AU=U^*AU$.

$AU=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1+i)(1-\sqrt{2}) & (1+i)(1+\sqrt{2})\\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\end{bmatrix}$ より

$U^*AU=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1-i & -\sqrt{2}\\ 1-i & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+i)(1-\sqrt{2}) & (1+i)(1+\sqrt{2})\\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2(1-\sqrt{2})-\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) & 2(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}(2+\sqrt{2})\\ 2(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) & 2(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(2+\sqrt{2})\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4(1-\sqrt{2}) & 0\\ 0 & 4(1+\sqrt{2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1+\sqrt{2}\end{bmatrix}$