練習問題解答 (2013.7.4 出題)

1. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から, シュミットの直交化により $\mathbf{R^4}$ の正規直交基底を作れ.

   $b_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $b_2 = a_2 - \frac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)} b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   $b_3 = a_3 - \frac{(b_1,a_3)}{(b_1,b_1)} b_1 - \frac{(b_2,a_3)}{(b_2,b_2)} b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   $b_4 = a_4 - \frac{(b_1,a_4)}{(b_1,b_1)} b_1 - \frac{(b_2,a_4)}{(b_2,b_2)} b_2 - \frac{(b_3,a_4)}{(b_3,b_3)} b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   よって求める $\mathbf{R^4}$ の正規直交基底は $\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\frac{b_4}{|b_4|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. $a_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ i \end{bmatrix}$ とする.

   (a) $\{a_1, a_2\}$ からシュミットの直交化により直交系を作れ.

   $b_1 = a_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$.

   $b_2 = a_2 - \frac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)} b_1$ で, $(b_1,b_1) = 3$, $(b_1,a_2) = (-i) \cdot 1 + 1 \cdot (1+i) + (-i) \cdot i = 2$ より

   $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ i \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3-2i \\ 1+3i \\ i \end{bmatrix}$. b_2 を定数倍しても直交性は変わらないので $b_2 = \begin{bmatrix} 3-2i \\ 1+3i \\ i \end{bmatrix}$ ととれる.

   (b) (a) で求めた直交系 $\{b_1, b_2\}$ を拡大して, $\mathbf{C^3}$ の直交基底 $\{b_1, b_2, b_3\}$ を作れ. (b_3 の第 1 成分を 1 にすること.)

   $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおいて直交化を続けてみる.

   $b_3 = a_3 - \frac{(b_1,a_3)}{(b_1,b_1)} b_1 - \frac{(b_2,a_3)}{(b_2,b_2)} b_2$ で $(b_1,b_1) = 3$, $(b_2,b_2) = 24$, $(b_1,a_3) = (-i) \cdot 1 = -i$, $(b_2,a_3) = (3+2i) \cdot 1 = 3+2i$ より

   $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-i}{3} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} - \frac{3+2i}{24} \begin{bmatrix} 3-2i \\ 1+3i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ -2-i \end{bmatrix}$. よって $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ -2-i \end{bmatrix}$.