

練習問題 3 解答 (2013.5.2 出題)

次の連立方程式を解け.

$$1. \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{基本変形により } \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array} \text{ となる. 方程式に戻すと}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1/2 \end{cases} \text{ より解は } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 + 2 \\ 2 \\ -1/2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{基本変形により } \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \text{ となる. 方程式に戻すと}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases} \text{ より解は } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_4 - x_5 \\ -2x_4 + x_5 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{基本変形により } \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \text{ となる. 方程式に戻すと } \begin{cases} x_1 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\text{より解は } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 - 1 \\ -x_4 - 1 \\ 1 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意

- 必ず簡約階段形 (主成分の上下はすべて 0) まで引き出す。
方程式に戻してからさらにはき出しを続けるのは間違いやすい。
- 方程式に戻したら、最も左の変数を、他の変数で表して、解ベクトルを作る。
解がすぐ書ける形なのに、右側の変数を左側の変数で表そうとする人がいる。(右側の変数は自由変数であり、複数現れる可能性があるため、間違っただけの解を作る恐れがある。)