練習問題 4 解答 (2013.5.9 出題)

1. 次の行列を簡約し, 階数を求めよ (a で場合分け).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$$

第 1 列のはき出しにより $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-a^2 \end{bmatrix}$ を得る. 第 3 行に注目して場合分けをする.

(a) $a-1=0$, すなわち $a=1$ のとき

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は rref なので, $\mathrm{rank}(A) = 1$.

(b) $a-1 \neq 0$ のとき

第 3 行, 第 4 行をそれぞれ $a-1$, $1-a$ で割ると $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ となりさらに $A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ まで変形できる.

i. $a=0$ のとき

$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は rref より $\mathrm{rank}(A'') = 3$.

ii. $a \neq 0$ のとき

第 4 行を a で割って変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となるので $\mathrm{rank}(A) = 4$.

以上により, $a=0$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 1$, $a=1$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 3$, $a \neq 0, 1$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 4$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ に対し, $(\lambda E - A)x = 0$ が非自明解をもつための λ の条件とその時の解を求めよ.

$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$ に対し, 第 1, 3 列の入れ替えおよび (1,1) 成分によるはき出しで $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 0 & 1-3\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$ を得る.

(a) $\lambda+1=0$, すなわち $\lambda=-1$ のとき

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ をさらに変形して $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}(\lambda E - A) = 2 < 3$ となり $(\lambda E - A)x = 0$ は非自明解をもつ.

方程式に戻すと $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ より解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (x_3 は任意).

(b) $\lambda+1\neq 0$ のとき

A' の第 2 行を $\lambda+1$ で割って, (2,2) 成分ではき出すと, $A''=\begin{bmatrix}1&0&\lambda-2\\0&1&1\\0&0&-(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$ を得る.

i. $\lambda-1=0$ すなわち $\lambda=1$ のとき

$A''=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ は rref より $\mathrm{rank}(\lambda E-A)=2<3$ となり $(\lambda E-A)x=0$ は非自明解をもつ. 方程式に戻すと $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$ より解は $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\-x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ (x_3 は任意).

ii. $\lambda-1\neq 0$ のとき A'' の第 3 行を $-(\lambda-1)^2$ で割って変形すると単位行列になるので $\mathrm{rank}(\lambda E-A)=3$ となり非自明解を持たない.

以上より, $(\lambda E-A)x=0$ が非自明解をもつのは $\lambda=\pm 1$ の場合で, 解はそれぞれ上に挙げたとおり.

コメント

- 問題 1 は, とりあえずやれるところまでやってから, 自然に出てくる場合分けをすればよい. 例えば, 第 1 列に 1 があるので, わざわざ a による場合分けから始めるのは不自然.
- 問題 2 は, 場合分けが不完全なもの ($\lambda=1$ が出てこない), あるいは $\lambda=1$ の場合の方程式の解がでたらめなもの, そもそも解を与えていないものが結構多かった. こちらの問題も, 自然に出てくる場合分けを処理すれば解ける.