練習問題 6 解答 (2013.5.30 出題)

1. 次の集合が $\mathbf{R}^3$ の部分空間かどうか調べよ. (部分空間なら証明する, 部分空間でないなら部分空間の定義に反するような要素の例を示す)

   (a) $W_1 = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_2, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

   $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと $W_1 = \mathrm{Ker(A)}$ なので W_1 は部分空間である.

   (b) $W_2 = \{(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 \leq x_2, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

   $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ とおくと $x \in W_2$ だが, $-x = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin W_2$ なので W_2 は部分空間でない.

   単に, 「$c < 0$, $x_1 \leq x_2$ のとき $cx_1 \geq cx_2$ だから」では不十分. 実際, $x_1 = x_2 \neq 0$ なる W_2 の元は, 負数をかけても W_2 の元である. 反例としては具体的な例が必要である.

   (c) $W_3 = \{(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 = x_2^2, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

   $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくと $x, y \in W_3$ だが, $x + y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \notin W_3$ なので W_3 は部分空間でない.

2. W_1, W_2 が $\mathbf{R}^n$ の部分空間のとき, $W_1 \cap W_2$ も $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを示せ.

   $x, y \in W_1 \cap W_2$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, $x, y \in W_1$ で W_1 が部分空間より $x + y, cx \in W_1$. 同様に $x, y \in W_2$ で W_2 が部分空間より $x + y \in W_2, cx \in W_1$. よって $x + y, cx \in W_1 \cap W_2$. よって $W_1 \cap W_2$ は部分空間である.

3. W_1, W_2 が $\mathbf{R}^n$ の部分空間とするとき, $W = W_1 \cup W_2$ が $\mathbf{R}^n$ の部分空間なら, $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ が成り立つことを示せ.

   $W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1$ と仮定すると, $x_1 \in W_1 \setminus W_2$, $x_2 \in W_2 \setminus W_1$ が存在する. $x = x_1 + x_2$ とおくと, W が部分空間なので $x \in W_1$ または $x \in W_2$. $x \in W_1$ なら W_1 が部分空間で $x_1 \in W_1$ より $x_2 = x - x_1 \in W_1$, $x \in W_2$ なら W_2 が部分空間で $x_2 \in W_2$ より $x_1 = x - x_2 \in W_2$ となりいずれも x_1, x_2 の条件に反する. よって $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$.