練習問題解答 (2013.6.6 出題)

1. 次のベクトルの組が一次独立か一次従属か判定せよ．一次従属の場合, 自明でない関係式を一つ求めよ．

   (a) $\{w_1, w_2, w_3\}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $A = [\,w_1 \quad w_2 \quad w_3\,] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, A は行基本変形により単位行列となる．よって $Ax = 0$ の解は 0 のみなので $\{w_1, w_2, w_3\}$ は一次独立.
   注意: 「自明解をもつので」では不十分. 「自明解のみをもつので」が正しい.

   (b) $\{w_1, w_2, w_3\}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

   $A = [\,w_1 \quad w_2 \quad w_3\,] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ とおくと, A は行基本変形により $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に変形される．よって $Ax = 0$ の解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (x_3 は任意). よって, 自明でない関係式 $2w_1 - 3w_2 + w_3 = 0$ を得る.
   注意: 一次従属関係式を書いていない人が多い.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ とするとき, Ker(A) の基底を一組求めよ.

   A は行基本変形により $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ に変形される．よって解は

   $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_5 \\ 0 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (x_3, x_5 は任意). よって Ker(A) の基底は $\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

3. $w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ に対し, $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ の基底を一組求めよ.

   $A = [\,w_1 \quad w_2 \quad w_3\,] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ とおくと, A は行基本変形により $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に変形される．主成分が第 1, 2 列にあるので, $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ の基底として $\{w_1, w_2\}$ がとれる.
   ちなみに, 基本変形の結果より $w_3 = 3w_1 - 2w_2$ が読み取れる.
   注意: Ker(A) **の基底を求めた人が続出した．期末試験ではそういうことのないように願います.**