練習問題 (2013.6.13)

学籍番号　　　　　　　　　氏名

1. $S = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $w_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$,
$W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \rangle$ とする.

(a) $\dim W$ および W の基底 $E \subset S$ を求めよ.

$$A = [\, w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

を行基本変形すると, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を得る. よって $\mathrm{rank}(A) = 3$ より $\dim W = 3$.
また, 主成分が第 1, 2, 4 列にあるので, W の基底として $E = \{w_1, w_2, w_4\}$ がとれる.

(b) E 以外の S の各要素を, E の要素の一次結合で表せ.
行基本変形結果の第 3 列より $w_3 = 2w_1 - w_2$, 第 5 列より $w_5 = w_1 - w_2 + 2w_4$.
(a) で最後まで基本変形していないのに (b) で (間違った) 結果を出している人が少なからずいた. また, (b) は, 基本変形の結果から直ちに読み取れるが, 何の説明もないのは, 正解にはしてあるものの本来は不十分である.

2. A を $m \times n$ 行列とし, $\dim \mathrm{Im}(A) = r$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = s$ とする.
$\mathrm{Im}(A)$ の基底を $b_1, \ldots, b_r$ とし, $b_1 = Ax_1, \ldots, b_r = Ax_r$ $(x_1, \ldots, x_r \in \mathbf{R}^n)$ とする.
$\mathrm{Ker}(A)$ の基底を $y_1, \ldots, y_s$ $(y_1, \ldots, y_s \in \mathbf{R}^n)$ とする.

(a) $\mathbf{R}^n = \langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \rangle$ を示せ.
$x \in \mathbf{R}^n$ とする. $Ax \in \mathrm{Im}(A)$ より $Ax = c_1b_1 + \cdots + c_rb_r = c_1Ax_1 + \cdots + c_rAx_r = A(c_1x_1 + \cdots + c_rx_r)$ $(c_1, \ldots, c_r \in \mathbf{R})$ と書ける. このとき $A(x - (c_1x_1 + \cdots + c_rx_r)) = 0$ より $x - (c_1x_1 + \cdots + c_rx_r) \in \mathrm{Ker}(A)$. よって $x - (c_1x_1 + \cdots + c_rx_r) = d_1y_1 + \cdots + d_sy_s$ $(d_1, \ldots, d_s \in \mathbf{R})$ と書ける. よって $x = c_1x_1 + \cdots + c_rx_r + d_1y_1 + \cdots + d_sy_s$, すなわち $x \in \langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \rangle$. x は任意なので $\mathbf{R}^n = \langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \rangle$.
$Ax \in \mathrm{Im}(A)$ からなぜか $c_1b_1 + \cdots + c_rb_r = 0$ に行ってしまう人がたくさんいた. 怪情報だとしても, x が突然消えてしまう点でおかしいと思わないのはおかしい. 何も考えずにコピー機のごとく丸写ししているのだろうか.

(b) $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ は一次独立であることを示せ.
$c_1x_1 + \cdots + c_rx_r + d_1y_1 + \cdots + d_sy_s = 0$ とする. 両辺に A を左からかけると, $Ay_1 = \cdots = Ay_s = 0$, $Ax_1 = b_1, \ldots, Ax_r = b_r$ により $c_1b_1 + \cdots + c_rb_r = 0$. $b_1, \ldots, b_r$ が一次独立より, $c_1 = \cdots = c_r = 0$. よって $d_1y_1 + \cdots + d_sy_s = 0$. さらに, $y_1, \ldots, y_s$ が一次独立より $d_1 = \cdots = d_s = 0$. よって $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ は一次独立である.

(c) $r + s = n$ を示せ. (次元定理の別証明)
(a), (b) より $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ は $\mathbf{R}^n$ の基底である. $\dim \mathbf{R}^n = n$ より $r + s = n$.
「次元定理の別証明」と書いてあるのに, $n = \dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = r + s$ と書いている人が結構いた. ひょっとしたら分かっているのかもしれないが, こう書かれると何を根拠にしているのか読む方は理解に苦しむ.