練習問題解答 (2013.6.20 出題)

1. $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対し, $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ の基底を一組求めよ.

   $A = [\,w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4\,] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおいて行基本変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を得る. 主成分は第 1, 3 列にあるので, $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ の基底として w_1, w_3 がとれる.

2. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と直交する $\mathbf{R}^4$ の単位ベクトル x を求めよ.

   $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ とおくと, $(a_1, x) = (a_2, x) = (a_3, x) = 0$ より $Ax = 0$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   これを解くと, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (x_4 は任意). x は単位ベクトルより $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ とする.

   (a) u_1, u_2, u_3 は W の直交基底であることを示せ.
   u_1, u_2, u_3 はどれも 0 でなく, $(u_1, u_2) = (u_1, u_3) = (u_2, u_3) = 0$ より W の直交基底である.

   (b) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の W への正射影ベクトル w を求めよ.
   $w = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$ とおくと $(u_1, v - w) = (u_2, v - w) = (u_3, v - w) = 0$ より $c_1 = \frac{(u_1, v)}{(u_1, u_1)} = \frac{3}{4}$, $c_2 = \frac{(u_2, v)}{(u_2, u_2)} = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{(u_3, v)}{(u_3, u_3)} = \frac{1}{4}$. よって $w = \frac{3}{4} u_1 + \frac{1}{4} u_2 + \frac{1}{4} u_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.