練習問題 (2013.6.13)

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

1. $S = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $w_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$,
$W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \rangle$ とする.

(a) $\dim W$ および W の基底 $E \subset S$ を求めよ.

(b) E 以外の S の各要素を, E の要素の一次結合で表せ.

2. A を $m \times n$ 行列とし, $\dim \mathrm{Im}(A) = r$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = s$ とする.
$\mathrm{Im}(A)$ の基底を $b_1, \ldots, b_r$ とし, $b_1 = Ax_1, \ldots, b_r = Ax_r$ $(x_1, \ldots, x_r \in \mathbf{R}^n)$ とする.
$\mathrm{Ker}(A)$ の基底を $y_1, \ldots, y_s$ $(y_1, \ldots, y_s \in \mathbf{R}^n)$ とする.

(a) $\mathbf{R}^n = \langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \rangle$ を示せ. (ヒント：任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対し, $Ax \in \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$.)

(b) $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ は一次独立であることを示せ. (ヒント：$c_1x_1 + \cdots + c_rx_r + d_1y_1 + \cdots + d_sy_s = 0$ とし, 両辺に A を左からかけて, $b_1, \ldots, b_r$ の一次独立性を使う.)

(c) $r + s = n$ を示せ. (次元定理の別証明)