講義メモ2の練習問題の解答

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

   $p_A(t) = (t-1)^3$.

   $N = A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ よりジョルダン標準形は $J_3(1)$.

   $N^2 e \neq 0$ なる e として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとり $P = (\, N^2 e \quad Ne \quad e\,) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $m_A(t) = (t-1)^3$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $p_A(t) = (t-1)^4$.

   $N = A - E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ よりジョルダン標準形は $J_2(1)$1 つと と $J_1(1)$ 2 つからなる.

   $Ne \neq 0$ なる e として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば $Ne = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ne と一次独立な $f, g \in \mathrm{Ker}N$ として $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとり, $P = (\, Ne \quad e \quad f \quad g\,) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と

おけば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. $m_A(t)=(t-1)^2$.

4. $A=\begin{pmatrix}-1&-4&0&0\\1&-1&0&4\\0&8&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$

$p_A(t)=(t+1)^4$.

$N=A+E=\begin{pmatrix}0&-4&0&0\\1&0&0&4\\0&8&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N=\langle\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$ よりジョルダン標準形は

$J_3(-1)$ と $J_1(-1)$ または $J_2(-1)$ 二つからなる. $N^2=\begin{pmatrix}-4&0&0&-16\\0&0&0&0\\8&0&0&32\\1&0&0&4\end{pmatrix}\neq O$ より

$J_3(-1)$ と $J_1(-1)$ からなることがわかる.

$N^2e\neq 0$ なる e として $e=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ をとれば $Ne=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $N^2e=\begin{pmatrix}-4\\0\\8\\1\end{pmatrix}$. N^2e と一次独

立な $f\in\mathrm{Ker}N$ として $f=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ をとり, $P=(\,N^2e\quad Ne\quad e\quad f\,)=\begin{pmatrix}-4&0&1&0\\0&1&0&0\\8&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

とおけば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$. $m_A(t)=(t+1)^3$.

6. $A=\begin{pmatrix}0&0&-4&0\\1&2&4&1\\1&0&4&0\\-3&0&-5&2\end{pmatrix}$.

$p_A(t)=(t-2)^4$.

$N=A-2E=\begin{pmatrix}-2&0&-4&0\\1&0&4&1\\1&0&2&0\\-3&0&-5&0\end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$ よりジョルダン標準形は $J_4(2)$.

$N^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$N^3e \neq 0$ なる e として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば $Ne = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $N^2e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N^2e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$P = (\, N^3e \quad N^2e \quad Ne \quad e\,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$m_A(t) = (t-2)^4$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$p_A(t) = (t-1)^5$.

$N = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ よりジョルダン標準形は $J_3(1)$ 1 つと $J_1(1)$ 2 つ, または $J_2(1)$ 2 つ と $J_1(1)$ 1 つからなる. $N^2 = O$ より $J_3(1)$ を含まないから $J_2(1)$ 2 つ と $J_1(1)$ 1 つとわかる. $Ne \neq 0$, $Nf \neq 0$ を満たす一次独立な e, f として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, をとれば $Ne = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Nf = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ne, Nf と一次独立な $g \in \mathrm{Ker}N$ として $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとり, $P = (\, Ne \quad e \quad Nf \quad f \quad g\,) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $m_A(t) = (t-1)^2$.