レポート問題解答

1　第1回

1. $A^2 = E$ を満たす行列 A は対角化可能であることを示せ.

   $f(t) = t^2 - 1$ とおくと $f(A) = A^2 - E = 0$ より A の最小多項式 $m_A(t)$ は $f(t)$ を割り切る. $f(t)$ は重複因子を持たないので, $m_A(t)$ も重複因子を持たない. よって A は対角化可能である.

2. $A^2 = E$, $A \neq \pm E$ のとき, 各固有空間への射影作用素を求めよ.

   1. より $m_A(t)$ は $t-1$, $t+1$, t^2-1 のいずれかであるが, $A \neq \pm E$ より $m_A(t) = t^2 - 1$. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ とし, $f_1(t) = \frac{m_A(t)}{t-1} = t+1$, $f_2(t) = \frac{m_A(t)}{t+1} = t-1$ とする. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$, $\deg g_1, \deg g_2 < 1$ (すなわち g_1, g_2 は定数) なる g_1, g_2 を求めると $(g_1+g_2)t + (g_1 - g_2) = 1$ より $g_1 = \frac{1}{2}$, $g_2 = -\frac{1}{2}$. よって $f_1 g_1 = \frac{1+t}{2}$, $f_2 g_2 = \frac{1-t}{2}$. よって固有値 1 の固有空間への射影を P_1, 固有値 -1 の固有空間への射影を P_2 とすれば, $P_1 = \frac{E+A}{2}$, $P_2 = \frac{E-A}{2}$. 実際, $y = P_1 x = \frac{1}{2}(x + Ax)$ とおけば, $Ay = \frac{1}{2}(Ax + A^2 x) = \frac{1}{2}(Ax + x) = y$ より $y \in \mathrm{Ker}(A-E)$. 同様に $y = P_2 x = \frac{1}{2}(x - Ax)$ とおけば, $Ay = \frac{1}{2}(Ax - A^2 x) = \frac{1}{2}(Ax - x) = -y$ より $y \in \mathrm{Ker}(A+E)$. $P_1 + P_2 = E$, $P_1^2 = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + E) = \frac{1}{2}(A+E) = P_1$, $P_2^2 = \frac{1}{4}(A^2 - 2A + E) = \frac{1}{2}(E - A) = P_2$, $P_1 P_2 = \frac{1}{4}(E - A^2) = O$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の最小多項式を求め, 対角化可能性を判定せよ.

   $p_A(t) = (t-1)^3(t+1)$ より $m_A(t)$ は $(t-1)(t+1)$, $(t-1)^2(t+1)$, $(t-1)^3(t+1)$ のいずれかである. $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $(A+E)(A-E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $(A+E)(A-E)^2 = O$. よって $m_A(t) = (t-1)^2(t+1)$. よって, 最小多項式が重複因子をもつので A は対角化可能でない.

4. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を相異なる複素数とし, $f(t) = \prod_{i=1}^{k}(t - \lambda_i)^{e_i}$, $f_i(t) = \frac{f}{(t-\lambda_i)^{e_i}}$ とするとき, $g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k = 1$ を満たす多項式 $g_1, \ldots, g_k$ で $\deg g_i < e_i$ となるものがとれることを示せ.

除算により $g_i = q_i(t-\lambda_i)^{e_i} + r_i$, $\deg(r_i) < e_i$ を満たす多項式 q_i, r_i がとれる．これを $g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k = 1$ に代入して $(q_1(t-\lambda_1)^{e_1} + r_1)f_1 + \cdots + (q_k(t-\lambda_k)^{e_k} + r_k)f_k = 1$. $(t-\lambda_i)^{e_i} f_i = m_A$ より $(q_1 + \cdots + q_k)m_A + r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k = 1$. $(q_1 + \cdots + q_k)m_A = 1 - (r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k)$. $\deg r_i f_i < \deg m_A$ より右辺の次数は $\deg m_A$ 未満で, 左辺は m_A で割りきれる．もし左辺が 0 でなければ次数は $\deg m_A$ 以上となるので左辺は 0. よって $r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k = 1$. $r_1, \ldots, r_k$ をあらためて $g_1, \ldots, g_k$ とおけば条件を満たす.

2　第2回

以下の行列のジョルダン標準形, 変換行列を求めよ.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

   $p_A(t) = (t+1)^3$.

   $N = A + E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ よりジョルダン標準形は $J_2(-1)$ と $J_1(-1)$ からなる． $Ne \neq 0$ なる e として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば $Ne = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$, Ne と一次独立な $f \in \mathrm{Ker}N$ として $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる． $P = (\, Ne \quad e \quad f \,) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $m_A(t) = (t+1)^2$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $p_A(t) = (t-1)^4$.

   $N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ よりジョルダン標準形は $J_3(1)$ と $J_1(1)$ または $J_2(1)$ 二つからなる． $N^2 = O$ より $J_2(1)$ 二つからなる．

   まず $Ne_1 \neq 0$ なる e_1 として $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとると $Ne_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}N + \langle e_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ に入らず, $Ne_2 \neq 0$ を満たす e_2 を $\mathbf{C}^4$ の標準基底から探すと $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる. ($\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}N + \langle e_1 \rangle$ に入る.) $Ne_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で, $P = (\, Ne_1 \quad e_1 \quad Ne_2 \quad e_2 \,) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $m_A(t) = (t-1)^2$.

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$p_A(t) = (t-1)^5$.

$N = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ よりジョルダン標準形は $J_4(1)$ と $J_1(1)$ または $J_3(1)$ と $J_2(1)$ からなる. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$N^3 = O$ より $J_3(1)$ と $J_2(1)$ からなる. $N^2 e \neq 0$ を満たす e として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば

$Ne = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $N^2 e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}N^2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$.

$$\mathrm{Ker}N^2 = \mathrm{Ker}N \oplus \langle Ne\rangle \oplus \langle f\rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\-4\end{pmatrix} \rangle \oplus \langle f\rangle \text{ を満たす } f \in \mathrm{Ker}N^2$$

として $f = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ がとれる. $Nf = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ で, $P = (\,N^2e \quad Ne \quad e \quad Nf \quad f\,) =$ $\begin{pmatrix}0&2&1&0&0\\2&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&-4&0&0&0\end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. $m_A(t) = (t-1)^3$.

追加. $A = \begin{pmatrix}-1&0&1&1\\12&1&-5&-6\\0&0&1&0\\0&0&-2&-1\end{pmatrix}$.

$p_A(t) = (t-1)^2(t+1)^2$ より固有値 $\lambda = \pm 1$.

$\underline{\lambda = 1}$**.** $N_1 = A - E = \begin{pmatrix}-2&0&1&1\\12&0&-5&-6\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}$ より $\mathrm{Ker}N_1 = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$. よって $J_2(1)$ が 1 つ. $N_1^2 = \begin{pmatrix}4&0&-4&-4\\-24&0&-24&24\\0&0&0&0\\0&0&4&4\end{pmatrix}$ より $\mathrm{Ker}N_1^2 = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \rangle$. $N_1e \neq 0$ なる $e \in \mathrm{Ker}N_1^2$ として $e = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ をとると, $N_1e = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda = -1}$**.** $N_2 = A + E = \begin{pmatrix}0&0&1&1\\12&2&-5&-6\\0&0&2&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$ より $\mathrm{Ker}N_2 = \langle \begin{pmatrix}-1\\6\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$. よって $J_2(-1)$ が 1 つ. $N_2^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\24&4&4&0\\0&0&4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}$ より $\mathrm{Ker}N_2^2 = \langle \begin{pmatrix}-1\\6\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$. $N_2f \neq 0$ なる $f \in \mathrm{Ker}N_2^2$ として $f = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ をとると, $N_2f = \begin{pmatrix}1\\-6\\0\\0\end{pmatrix}$.

$P = (\, N_1 e \quad e \quad N_2 f \quad f \,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば P は正則で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $m_A(t) = (t-1)^2(t+1)^2$.

3　第3回

問題 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ とする.

(a) A のジョルダン標準形 J, $J = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P を求めよ.
$P_A(t) = (t{+}2)^3$ より固有値は -2 のみ. $N = A{+}2E = (\, 2 \quad 0 \quad 1 - 8 \quad 0 \quad -4 - 4 \quad 0 \quad -2 \,)$ より $\mathrm{Ker} N = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. よってジョルダン標準形は $J_2(-2)$, $J_1(-2)$ が一つずつ. $Ne \neq 0$ なる e として $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととると $Ne = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ne と一次独立な $f \in \mathrm{Ker} N$ として $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととり $P = (\, Ne \quad e \quad f \,) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則で $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $x(k) = {}^t(\, x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k) \,)$ に対する漸化式 $x(k+1) = Ax(k)$ の解空間の基底を一組求めよ. $J^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & k(-2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$ より $A^k P = PJ^k = \begin{pmatrix} 2(-2)^k & (-k+1)(-2)^k & 0 \\ -8(-2)^k & 4k(-2)^k & (-2)^k \\ -4(-2)^k & 2k(-2)^k & 0 \end{pmatrix}$. よって解空間の基底として $(-2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $(-2)^k \begin{pmatrix} -k+1 \\ 4k \\ 2k \end{pmatrix}$, $(-2)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる.

問題 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(a) A のジョルダン標準形 J, $J = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P を求めよ.

$p_A(t) = (t-1)^3(t-3)$ より固有値 $\lambda = 1, 3$.

$\lambda = 1$ に対し, $N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. よって,

固有値 1 のジョルダンブロックは $J_3(1)$ が一つ. $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ より

$\mathrm{Ker}N^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. $N^2 e \neq 0$ なる $e \in \mathrm{Ker}N^3$ として $e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をと

ると $Ne = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N^2 e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルとして $f = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

をとり $P = (\, N^2 e \quad Ne \quad e \quad f \,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則で $J =$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $x(t) = {}^t(\, x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t) \,)$ に対する微分方程式 $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ の解空間の基底を一組求めよ.

問題 3. 漸化式 $x_{n+3} = 2x_{n+2} + 4x_{n+1} - 8x_n$ $(n \geq 0)$, $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1$ を満たす数列 $\{x_n\}$ の第 n 項を求めよ.

特性多項式 $t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = (t-2)^2(t+2)$ より解空間の基底として 2^n, $n2^n$, $(-2)^n$ がとれる. $x_n = c_0 2^n + c_1 n 2^n + c_2(-2)^n$ とおく. $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ より $\begin{cases} c_0 + c_2 = 1 \\ 2c_0 + 2c_1 - 2c_2 = 0 \\ 4c_0 + 8c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases}$ を得る. これをとくと $c_0 = \frac{11}{16}$, $c_1 = -\frac{3}{8}$, $c_2 = \frac{5}{16}$ となるので,
$x_n = \frac{1}{16}(11 \cdot 2^n - 6 \cdot n2^n + 5(-2)^n)$.