# 線形代数学III 講義メモ (その1)

野呂 正行

April 22, 2013

## 1 最小多項式

$A \in M_n(\mathbf{C})$, すなわち $A$ を複素数を要素とする $n$ 次正方行列とする. 多項式 $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C})$ に対し, $f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E$ と定義する.

**定理 1.1 (Cayley-Hamilton)** $A$ の特性多項式 $p_A(t)$ に対し $p_A(A) = O$.

証明. $p_A(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$ とする. $tE - A$ の余因子行列を $X = t^{n-1}B_{n-1} + \cdots + B_0$ $(B_i \in M_n(\mathbf{C}))$ とすると $X(tE-A) = \det(tE-A)E = p_A(t)E = t^n \cdot a_n E + \cdots + a_0 E$. 左辺を展開して $X(tE-A) = (t^n B_{n-1} + \cdots + tB_0) - (t^{n-1}B_{n-1}A + \cdots + B_0 A) = t^n B_{n-1} + t^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + \cdots + t(B_0 - B_1 A) - B_0 A$ より $a_n E = B_{n-1}$, $a_{n-1}E = (B_{n-2} - B_{n-1})A$, ..., $a_1 E = B_0 - B_1 A$, $a_0 E = -B_0 A$. よって $p_A(A) = B_{n-1}A^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)A^{n-1} + \cdots (B_0 - B_1 A)A - B_0 A = O$. (証明終)

**定理 1.2** $I = \{f(t) \in \mathbf{C}[t] \mid f(A) = O\}$ とおくと, 最高次係数が 1 の多項式 $m_A(t) \in I$ がただ一つ存在して, $I = \{g(t)m_A(t) \mid g(t) \in \mathbf{C}[t]\}$ (すなわち, $m_A(t)$ の倍多項式全体) となる.

証明. 特性多項式 $p_A(t)$ は $p_A(A) = O$ を満たすので, $I$ は空集合でない. $I$ に属する 0 でない多項式のうち, 最小次数で最高次係数 1 の多項式を一つとり $m_A(t)$ とする. 任意の $f(t) \in I$ に対し, 除算により, 多項式 $q(t)$ と $r(t)$ $(r(t) = 0$ または $\deg r(t) < \deg m_A(t))$ が存在して, $f(t) = q(t)m_A(t) + r(t)$ を満たす. このとき, $f(A) = q(A)m_A(A) + r(A)$ で, $f(t), m_A(t) \in I$ より $f(A) = O$, $m_A(A) = 0$ だから, $r(A) = O$ すなわち $r(t) \in I$. もし $r(t) \neq 0$ なら, $m_A(t)$ が $I$ の次数最小の多項式であることに反するから, $r(t) = 0$ すなわち, $f(t)$ は $m_A(t)$ で割り切れる. $m(t) \in I$ が同様に次数最小かつ最高次係数が 1 とすれば, $m_A(t) \mid m(t)$ かつ $m(t) \mid m_A(t)$ より $m(t) = m_A(t)$ が成り立つ. すなわち $m_A(t)$ は一意的に定まる. (証明終)

**定義 1.3** $m_A(t)$ を $A$ の最小多項式と呼ぶ.

**系 1.4** 特性多項式 $p_A(t)$ は 最小多項式 $m_A(t)$ で割り切れる.

**定理 1.5** $p_A(t)$ と $m_A(t)$ の根全体は一致する.

証明. $m_A(t) \mid p_A(t)$ より $m_A(t)$ の根は $p_A(t)$ の根である. 逆に, $\lambda$ を $p_A(t)$ の根 (すなわち固有値) とし, $\lambda$ に属する固有ベクトルを $x$ とすれば, $Ax = \lambda x$ より, 任意の $i$ に対し $A^i x = \lambda^i x$ が成り立つ. よって, $0 = m_A(A)x = m_A(\lambda)x$. $x \neq 0$ より $m_A(\lambda) = 0$ すなわち $\lambda$ は $m_A(t)$ の根である. (証明終)

**定義 1.6** $\lambda$ を $A$ の固有値, $e$ を $A$ の最小多項式 $m_A(t)$ における $t-\lambda$ の重複度とするとき, $V(A,\lambda)=\mathrm{Ker}(\lambda E-A)^e$ を $\lambda$ に属する $A$ の一般固有空間と呼ぶ.

**定義 1.7** $T$ を $V$ の線形変換とする. 部分空間 $W\subset V$ が $T$-不変とは任意の $x\in W$ に対し $Tx\in W$ が成り立つことをいう. $W$ の基底 $E$ を拡大した $V$ の基底 $E'$ による $T$ の表現行列は, $T_W$ の表現行列を $B$ として, $A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ の形となる. これは, $e\in E$ に対して $Te$ を $E'$ で表すと, 不変性により $E$ の元のみの線形結合となるからである.

**注意 1.8** $V(A,\lambda)$ は $\lambda$ に属する固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda E-A)$ を含む. また, $V(A,\lambda)$ は $A-$ 不変である.

**定義 1.9** 一般の線形変換 $T$ に対しても, ある基底に関する表現行列の固有多項式, 最小多項式をもって, その線形変換の固有多項式, 最小多項式と定義することができる. これは, $B=P^{-1}AP$ ならば, $\det(tE-B)=\det(P^{-1}(tE-A)P)=\det(P^{-1})\det(tE-A)\det(P)=\det(tE-A)$ および, $f(A)=O\Leftrightarrow P^{-1}f(A)P=O\Leftrightarrow f(P^{-1}AP)=O\Leftrightarrow f(B)=O$ より, 最小多項式が基底によらず一意的に決まることからわかる. $T$ の固有多項式, 最小多項式を $p_T(t)$, $m_T(t)$ と書く.

**定理 1.10** $T:V\to V$ を線形変換とする. $W$ を $T-$ 不変な部分空間とし, $T_W:W\to W$ を $T$ の $W$ への制限とする. このとき, $p_{T_W}\mid p_T$, $m_{T_W}\mid m_T$.

証明. $W$ の基底を拡大した $V$ の基底による $T$ の表現行列 $A$ は, $T_W$ の表現行列を $B$ として, $A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ の形となる. このとき, $p_T(t)=\det\begin{pmatrix} tE-B & C \\ O & tE-D \end{pmatrix}=\det(tE-B)\det(tE-C)=p_{T_W}(t)\det(tE-C)$ より $p_{T_W}(t)\mid p_T(t)$. また, $m_T(T)=0$ より $m_T(T_W)=0$. よって $m_{T_W}\mid m_T$.

(証明終)

# 2 一般固有空間分解

**定理 2.1** 複素数係数多項式 $f_1(t),\dots,f_k(t)$ が共通根を持たないとするとき, $g_1(t)f_1(t)+\cdots+g_k(t)f_k(t)=1$ を満たすような多項式 $g_1(t),\dots,g_k(t)$ が存在する.

証明. $J=\{g_1f_1+\cdots+g_kf_k\mid g_1,\dots,g_k\in\mathbf{C}[t]\}$ とおく. $J$ に属する $0$ でない多項式で, 最小次数のものを一つとり $d$ とする. $f\in J$ を任意にとると, 除算により, 多項式 $q$, $r$ ($r=0$ または $\deg r<\deg d$) が存在して, $f=qd+r$ を満たす. ここで, $f,d\in J$ より $f-qd\in J$ が成り立つから, $r\in J$. もし $r\neq 0$ ならば, $d$ の最小次数性に反するから $r=0$. すなわち $f$ は $d$ で割り切れる. 特に, $f_1,\dots,f_k$ も全て $J$ の元だから, $d$ で割り切れる. ところが $f_1,\dots,f_k$ は共通根を持たないので, $d$ は定数となる. よって, $1\in J$ となり, 定理は示された. (証明終)

$n$ 次正方行列 $A$ のすべての相異なる固有値を $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ とし, 最小多項式 $m_A(t)$ が, $m_A(t)=(t-\lambda_1)^{e_1}\cdots(t-\lambda_k)^{e_k}$ と因数分解されたとする. このとき, 各 $i=1,\dots,k$ に対し, $f_i=m_A/(t-\lambda_i)^{e_i}$ とおけば, $f_1,\dots,f_k$ は共通根を持たない. よって, 定理により, 多項式 $g_1(t),\dots,g_k(t)$ が存在して $g_1f_1+\cdots+g_kf_k=1$ を満たす. $t$ に $A$ を代入すれば, $g_1(A)f_1(A)+\cdots+g_k(A)f_k(A)=E$ を得る. ここで, $P_i=g_i(A)f_i(A)$ と定義すると, $P_1+\cdots+P_k=E$ となる. この $P_1,\dots,P_k$ は次を満たす.

**定理 2.2** $V_i = V(A,\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\lambda_i E - A)^{e_i}$ とおく.

1. $P_i P_j = O \ (i \neq j)$,
2. $P_i^2 = P_i$,
3. $\mathrm{Im}P_i = V_i$ かつ $\mathbf{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.

証明. 1. $i \neq j$ のとき, $f_{ij}(t) = f_i(t)/(t-\lambda_j)^{e_j}$ とおくと, $P_iP_j = g_i(A)f_i(A)g_j(A)f_j(A) = g_i(A)g_j(A)f_i(A)(\lambda_i E - A)^{e_i} f_{ij}(A) = g_i(A)g_j(A)m_A(A)f_{ij}(A) = O$.
2. $P_1 + \cdots + P_k = E$ に $P_i$ をかけて 1. を使うと $P_i^2 = P_i$ を得る.
3. $P_1 + \cdots + P_k = E$ より, 任意の $x \in \mathbf{C}^n$ に対し $P_1 x + \cdots + P_k x = x$ である. ここで, $(\lambda_i E - A)^{e_i}(P_i x) = (\lambda_i E - A)^{e_i} g_i(A) f_i(A) x$ で, $(\lambda_i E - A)^{e_i} f_i(A) = m_A(A) = O$ より $(\lambda_i E - A)^{e_i}(P_i x) = 0$ すなわち $P_i x \in V_i$. よって, $\mathbf{C}^n = V_1 + \cdots + V_k$ が成り立つ. これが直和であることを示すには, $x_1 + \cdots + x_k = 0 \ (x_i \in V_i)$ ならば $x_i = 0$ であることを示せばよい. $x_i = (P_1 + \cdots + P_k)x_i = P_1 x_i + \cdots + P_k x_i$ であるが, $x_i \in V_i$ ならば $(\lambda_i E - A)^{e_i} x_i = 0$ で, $i \neq j$ のとき $P_j = g_j(A) f_{ij}(A)(\lambda_i E - A)^{e_i}$ とかけることから $P_j x_i = 0$. よって $x_i = P_i x_i$ を得る. これは, $x_i \in V_i$ ならば $x_i = P_i x_i$ すなわち $x_i \in \mathrm{Im}P_i$ を意味するから, $\mathrm{Im}P_i = V_i$ が言えた. 以上により, $x_1 + \cdots + x_k = 0 \ (x_i \in V_i)$ ならば, $0 = P_i(x_1 + \cdots + x_k) = P_i x_i = x_i$ となるので $\mathbf{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ が成り立つ. (証明終)

**定義 2.3** 前定理の $P_1, \ldots, P_k$ を, 直和分解 $\mathbf{C}^n = V(A,\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(A,\lambda_k)$ に対応する射影という. また, この直和分解を, 一般固有空間分解と呼ぶ.

**注意 2.4** $A$ の固有多項式を $p_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$ と分解したとき, $W_i = \mathrm{Ker}(\lambda_i E - A)^{m_i}$ とおけばまったく同様に直和分解 $\mathbf{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ を得る. ここで, $m_A(t) \mid p_A(t)$ より $e_i \leq m_i$ なので, $V(A,\lambda_i) \subset W_i$ だから $\dim V(A,\lambda_i) \leq \dim W_i$ で, $\dim V(A,\lambda_i) + \cdots + \dim V(A,\lambda_i) = \dim W_1 + \cdots \dim W_k = n$ より $W_i = V(A,\lambda_i) \ (i = 1, \ldots, k)$ が成り立つ. すなわち $\mathrm{Ker}(\lambda_i E - A)^{m_i} = \mathrm{Ker}(\lambda_i E - A)^{e_i}$.

**定理 2.5** $p_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$ とすれば, $\dim V(A,\lambda_i) = m_i$.

証明. $V(A,\lambda_i)$ は $A-$ 不変より, 線形変換 $A_i : V(A,\lambda_i) \to V(A,\lambda_i)$ を $x \mapsto Ax$ で定義できる. このとき, $x \in V(A,\lambda_i)$ ならば $(\lambda_i E - A)^{e_i} x = 0$ より, $A_i$ の最小多項式 $m_{A_i}(t)$ は $(t-\lambda_i)^{e_i}$ を割り切る. よって, $m_{A_i}(t)$ の根は $\lambda_i$ のみであり, $A_i$ の固有多項式 $p_{A_i}(t)$ は $m_{A_i}(t)$ と同一の根を持つから, $d_i = \dim V(A,\lambda_i)$ とおくと $p_{A_i}(t) = (t-\lambda_i)^{d_i}$. ここで, $p_{A_i}(t) \mid p_A(t)$ が成り立つから, $d_i \leq m_i$. 一方で, $d_1 + \cdots + d_k = n$, $m_1 + \cdots + m_k = \deg p_A(t) = n$ より, $d_i = m_i$. (証明終)

**定理 2.6** $A$ が対角化可能 $\Leftrightarrow$ $m_A(t)$ が重根を持たない.

証明. $\Rightarrow$) $A$ が対角化可能とし, $A$ の全ての相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $p_A(t)$ における $t - \lambda_i$ の重複度を $m_i$ とする. このとき, 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_k E_k \end{pmatrix}$, ただし $E_i$ は $m_i$ 次単位行列. すると, $(P^{-1}AP - \lambda_1 E) \cdots (P^{-1}AP - \lambda_k E) = O$ より $f(t) = (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_k)$ とおけば, $m_A(t) \mid f(t)$. よって $m_A(t)$ は重根を持たない.
$\Leftarrow$) $m_A(t) = (t-\lambda_1)^{e_1} \cdots (t-\lambda_k)^{e_k}$ が重根を持たないとすると, $e_1 = \ldots = e_k = 1$ より $V(A,\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\lambda_i E - A)^{e_i} = \mathrm{Ker}(\lambda_i E - A)$ となり $V(A,\lambda_i)$ は $\lambda_i$ に属する固有空間となる. よって $\mathbf{C}^n$ は固有空間の直和となり, $A$ は対角化可能である. (証明終)

## 3 ジョルダン標準形

前節での結果により, $A$ の各一般固有空間 $V(A,\lambda)$ 上で, 線形写像 $x \mapsto Ax$ ($A$ の $V(A,\lambda)$ への制限), 従ってその表現行列は固有値 $\lambda$ のみを持つ. 本節では, そのような行列がどのような性質をもつか調べる. $n$ 次正方行列 $A$ の固有値は $\lambda$ のみであるとする. このとき, 特性多項式 $p_A(t) = (t-\lambda)^n$ より最小多項式 $m_A(t) = (t-\lambda)^e$ $(e \le n)$ と書ける.

**定義 3.1 (ジョルダンブロック)** $k$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}$ を $J_n(\lambda)$ と書く. $A = J_n(\lambda)$ のとき, $p_A(t) = m_A(t) = (t-\lambda)^n$ である. 一般に, $A$ が $J_{n_1}(\lambda), \ldots, J_{n_k}(\lambda)$ が対角にならぶ行列のとき, $p_A(t) = (t-\lambda)^{n_1+\cdots+n_k}$, $m_A(t) = (t-\lambda)^{\max(n_1,\ldots,n_k)}$ である.

**定義 3.2** $n$ 次正方行列 $N$ が, ある正整数 $k$ に対し $N^k = O$ を満たすとき巾零であるという. このとき, $p_N(t) = t^n$, および $N^e = O$ となる最小の $e$ に対し $m_N(t) = t^n$ となる.

**定義 3.3** $N$ が巾零とする. $x \in \mathbf{C}^n$ に対し $N^k x = 0$ を満たす最小の正整数を $x$ の高さと呼ぶ.

**定理 3.4** $N$ が巾零とする. $x$ が高さ $k$ ならば $(N^{k-1}x, N^{k-2}, \ldots, Nx, x)$ は一次独立である.

証明. $c_{k-1}N^{k-1}x + \cdots + c_0 x = 0$ とすると, $N^{k-1}$ をかけて $N^k x = 0$ を使えば $c_0 N^{k-1}x = 0$ を得る. $N^{k-1}x \ne 0$ より $c_0 = 0$. 以下同様に $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_{k-1} = 0$ を得る. (証明終)

**系 3.5** $N$ が $n$ 次巾零行列とする. $p_A(t) = m_A(t)$ ならば, 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}NP = J_n(0)$.

証明. $N^{n-1} \ne O$ より, ある $x \ne 0$ が存在して $N^{n-1}x \ne 0$. このとき $x$ の高さは $n$ となるので $(N^{n-1}x, N^{n-2}, \ldots, Nx, x)$ は一次独立であり, 個数が $n$ だから $\mathbf{C}^n$ の基底となる. $P = (N^{n-1}x\, N^{n-2}\, \ldots\, Nx\, x)$ とおけば $P$ は正則で $NP = (0\, N^{n-1}x\, \ldots\, N^2x\, Nx) = PJ_n(0)$. (証明終)

一般の場合, すなわち $\deg m_N < n$ の場合も, $\mathbf{C}^n$ が, 系と同様に構成される $N-$ 不変部分空間の直和として表されることが示される. 各不変部分空間上では, $N$ は系と同様にジョルダンブロックで表現されるので, 結果として巾零行列はジョルダンブロックが対角に並ぶ行列で表現される.

**定理 3.6** $N$ を $n$ 次巾零行列とし, $m_N(t) = t^e$ とする. $V_i = \mathrm{Ker} N^i$ $(i = 0, \ldots, e)$ とおく. $X_{e+1} = \{0\}$ とする. $X_{i+1}$ まで定まったとき, $W_i \subset V_i$ を $V_i = (V_{i-1} + NX_{i+1}) \oplus W_i$ を満たす部分空間, および $X_i = NX_{i+1} \oplus W_i$ と定める. このとき,

1. $V_{i-1} + NX_{i+1}$ $(i = e, \ldots, 1)$ は直和である.
2. $i \ge 2$ のとき $N : X_i \to NX_i$ は同型写像である.
3. 各 $W_i$ の基底の元 $x$ から作った $(N^{i-1}x, \ldots, Nx, x)$ を全て合わせたものは $\mathbf{C}^n$ の基底となる.

4. 2. の基底に関する $N$ の行列は, ジョルダンブロックを対角に並べたものとなる. より具体的に, $\dim W_i = m$ ならば, $J_i(0)$ がちょうど $m$ 個あらわれる.

証明. 1. $i = e, e-1, \ldots, 1$ に関する帰納法でしめす. $i = e$ のとき, $X_{e+1} = \{0\}$ より $V_{e-1} \cap NX_{e+1} = \{0\}$ である. $V_{i-1} \cap NX_{i+1} = \{0\}$ と仮定する. $x \in V_{i-2} \cap NX_i$ とすれば, $x = Ny$ $(y \in X_i)$ と書ける. このとき, $0 = N^{i-2}x = N^{i-1}y$ より $y \in V_{i-1} \cap X_i$. 仮定より $V_i = V_{i-1} + X_i = V_{i-1} \oplus NX_{i+1} \oplus W_i$ だから $y = 0$, $x = 0$ となり $V_{i-2} \cap NX_i = \{0\}$. よって, 帰納法により $i = e, e-1, \cdots, 1$ に対し $V_{i-1} + NX_{i+1}$ は直和である.
2. $x \in X_i$ が $Nx = 0$ を満たすとすると $x \in V_1 \subset V_{i-1}$ で $V_{i-1} \cap X_i = \{0\}$ より $x = 0$.
3. 1. および 2. より, $\mathbf{C}^n = V_e = (N^{e-1}W_e \oplus \cdots \oplus W_e) \oplus (N^{e-2}W_{e-1} \oplus \cdots \oplus W_{e-1}) \oplus \cdots \oplus (NW_2 \oplus W_2) \oplus W_1$ で, 各 $W_i$ の基底 $E_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in_i})$ をとれば, $(N^{i-1}E_i, \ldots, NE_i, E_i)$ を合わせたものが $\mathbf{C}^n$ の基底となることが言える. ($N : X_i \to NX_i$ が同型となることから, $X_i$ の一次独立なベクトル $(x_1, \ldots, x_k)$ に対し $(Nx_1, \ldots, Nx_k)$ も一次独立となる. )
4. $W_i$ の基底 $x$ 毎に作った $(N^{i-1}x, \ldots, Nx, x)$ を並べた基底に関する行列においては, この並びに対して $J_i(0)$ が一つ対応する. よって, $\dim W_i = m$ ならば $J_i(0)$ が $m$ 個現れる. (証明終)

**定義 3.7** 正方行列 $A$ に対し, 正則行列 $P$ をとって $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ と書けたとき, $J$ を $A$ のジョルダン標準形と呼ぶ.

定理においては, $V_{i-1} \oplus NX_{i+1}$ の基底を拡大して $V_i$ の基底を構成した. よって, 実際に追加すべき基底の個数を $d_i$ とすると $d_i = \dim V_i - (\dim V_{i-1} + \dim NX_{i+1}) = \dim V_i - (\dim V_{i-1} + \dim X_{i+1})$ となる. 特に, この数が 0 ならば, 付け加えるべき基底はないことになる. これは, サイズ $i$ のジョルダンブロックがないことを意味する. ここで, $\dim X_{i+1} = \dim V_{i+1} - \dim V_i$ より $r_i = \dim V_{i+1} - \dim V_i$ とおくと $d_i = r_{i-1} - r_i$. これは, 定理のやり方で基底を構成した場合のジョルダンブロックの個数だが, 実は次の定理が成り立つ.

**定理 3.8** 巾零行列 $N$ のジョルダン標準形における, サイズ $i$ のジョルダンブロックの個数は, $n_i = \dim \mathrm{Ker} N^i$, $r_i = n_{i+1} - n_i$ とおくとき $r_{i-1} - r_i$ で与えられる.

**定理 3.9** $n$ 次正方行列 $A$ の固有値が $\lambda$ のみであるとき, 次が成り立つ.

1. $A - \lambda E$ は巾零行列である.
2. 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda) \end{pmatrix}$ と書ける.
3. $k = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda E)$.
4. $A$ の最小多項式を $m_A(t) = (t - \lambda)^e$ とすれば, $\max(n_1, \ldots, n_k) = e$.

証明. 1. は明らかである.

2. 巾零行列 $A-\lambda E$ に対し, 前定理を適用すれば, 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}(A-\lambda E)P = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(0) \end{pmatrix}$ と書ける. これを変形すれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda) \end{pmatrix}$ を得る.
3. 各ジョルダンブロックに一つ固有ベクトルが対応し, これらの固有ベクトルは一次独立で固有空間を張るからジョルダンブロックの個数は $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda E)$ に等しい.
4. $J_{n_i}(\lambda)$ の最小多項式は $(t-\lambda)^{n_i}$ より $P^{-1}AP$ の最小多項式は $(t-\lambda)^{\max(n_1,\ldots,n_k)}$ に等しい. (証明終)

一般の正方行列 $A$ に対しても, 各 $A$ の一般固有空間への制限について, 前定理を適用すれば, 次が成り立つ.

**定理 3.10** 正方行列 $A$ に対し, 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ と書ける.