線形代数 III 講義メモ (その 2)

野呂 正行

May 20, 2013

1　最小多項式の計算

1.1　固有多項式の因数分解による方法

1. $p_A(x) = \prod_{i=1}^{l}(x-\lambda_i)^{e_i}$ と因数分解する.

2. $f(x) = \prod_{i=1}^{l}(x-\lambda_i)^{k_i}$ $(1 \le k_i \le e_i)$ で, $f(A) = O$ となるもののうち, それぞれの k_i が最も小さいものを探す.

   例えば $k_j = e_j (j \neq 1)$ としておき, k_1 を $e_1, e_1 - 1, \ldots$ と減らしていき, $f(A) \neq 0$ となる寸前の値, あるいは k_1 を $1, 2, \ldots$ と増やしていき最初に $f(A) = 0$ となったときの値を k_1 とし, 次に k_2 を決め, $\ldots$ と求めることができる.

例 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -37 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$p_A(x) = (x-1)^3$. $A - E \neq O$, $(A-E)^2 \neq O$ より $m_A(x) = (x-1)^3$.

例 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$. $(A-E)(A-2E) \neq O$ より $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.

例 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & -3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_A(x) = (x-1)^3(x-2)$. $(A-E)^2(A-2E) = O$, $(A-E)(A-2E) \neq O$ より $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.

1.2 最小多項式の定義を直接用いる方法

最小多項式の定義により,

1. $A + a_0E = 0$ を満たす a_0 があるかどうか探す.
   もしあれば, $m_A(t) = t + a_0$.

2. $A^2 + a_1A + a_0E = 0$ を満たす a_1, a_0 があるかどうか探す.
   もしあれば, $m_A(t) = t^2 + a_1t + a_0$.

$\cdots$

m. $A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_0E = 0$ を満たす $a_{m-1}, \ldots, a_0$ があるかどうか探す.
   もしあれば, $m_A(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_0$.

$\cdots$

という手順で $m_A(t)$ を求めることができる. 実際には, $a_{m-1}, \ldots, a_0$ を未定係数として $A_m = A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_0E$ を計算すれば, A_m の各成分は $a_{m-1}, \ldots, a_0$ の一次式となるので, これらがすべてをすべて 0 とおいた連立一次方程式を解いてみて, 解があれば $m_A(t)$ が見つかったことになる. 実際に上の手順を実行してみれば, 最初のうちは方程式の数が過剰で解がないが, ある時点で解がただ一つ存在し, $m_A(t)$ が得られることがわかる. ただし, この方法は手間が大変多く実用的ではない. この方法をもう少し効率よくした方法もあるが, ここでは述べない.

1.3 最小消去多項式による方法

$A \in M_n(K)$ とする. $x \in K^n$ $(x \neq 0)$ に対し, $f(A)x = 0$ を満たす 0 でない多項式 $f(t) \in K[t]$ のうち, 最小次数のモニックな多項式を A に関する x の最小消去多項式と呼ぶ. ここでは $m_{A,x}(t)$ と書くことにする. $m_A(A)x = 0$ より最小消去多項式は存在し, $m_A(t)$ の性質より $m_{A,x}(t) \mid m_A(t)$ が成り立つ. また, $m_A(t)$ の場合と同様に, 多項式 $f(t)$ が $f(A)x = 0$ を満たすならば $m_{A,x}(t) \mid f(t)$ であることも分かる.

定理 1.1 有限個の真部分空間の和集合 $S \subset K^n$ が存在して, $x \notin S$ ならば $m_{A,x}(t) = m_A(t)$.

証明. $m_A(t)$ の真のモニックな因子全体を $f_1(t), \ldots, f_k(t)$ とすると, 任意の $x \in K^n$ に対し, $m_{A,x}(t) \neq m_A(t)$ となるような最小消去多項式はこれらのいずれかに等しい. $m_{A,x}(t) = f_i(t)$ ならば $x \in \mathrm{Ker}(f_i(A))$ なので, $\{x \in K^n \mid m_{A,x}(t) \neq m_A(t)\} \subset \mathrm{Ker}(f_1(A) \cup \cdots \cup \mathrm{Ker}(f_k(A))$. この右辺を S とおくと, $x \notin S$ ならば $m_{A,x}(t) = m_A(t)$ が成り立つ. $m_A(t)$ の定義より $f_1(A), \ldots, f_k(A)$ はすべて O でないので $\dim \mathrm{Ker}(f_i(A) < n$ $(i = 1, \ldots, k)$ だから, S は有限個の真部分空間の和集合である. (証明終)

注意 1.1 K が無限体のとき, K^n の有限個の真部分空間の和集合は K^n と一致しない. ” ほとんど” すべての点で $m_{A,x}(t) = m_A(t)$ である. ($K = \mathbf{C}, \mathbf{R}$ の場合には, $m_{A,x}(t) \neq m_A(t)$ であるような x 全体は測度 0 であるといえる.)

この注意により, ランダムに選んだ $x \in K^n$ に対し $m_{A,x}(t)$ を計算すれば $m_{A,x}(t) = m_A(t)$ となる確率はほぼ 1 である.

注意 1.2 $\deg(m_{A,x}(t)) = n$ ならば $m_{A,x}(t) = m_A(t) = p_A(t)$ である.

例 1.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & -3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

(例 1.3 と同じ行列) に対し, 例えば $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -32 \end{pmatrix}$, $A^2x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ -88 \end{pmatrix}$, $A^3x = \begin{pmatrix} 4 \\ 32 \\ 1 \\ -192 \end{pmatrix}$ で, x, Ax, A^2x は一次独立だが $A^3x - 4A^2x + 5Ax - 2x = 0$ なので $m_{A,x}(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2$ を得る. この場合 $m_{A,x}(t) = m_A(t)$ となっている. しかし, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$, $A^2x = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$ で, x, Ax は一次独立だが $A^2x - 2Ax + x = 0$ なので $m_{A,x}(t) = t^2 - 2t + 1$ を得る. この場合は $m_{A,x}(t) \neq m_A(t)$ となっている.

この方法では, ベクトル列 $x, Ax, \ldots, A^kx, \ldots$ の一次独立性のテストを行うことになるため, 行列 (n^2 次元ベクトル) の一次独立性のテストよりも計算の手間が小さい. しかし, これでは数学的に確実に $m_A(t)$ を求めることはできない. このためには次の定理が有用である.

定理 1.2 $e_1, \ldots, e_n$ を基本ベクトルとするとき $m_A(t) = \mathrm{LCM}(m_{A,e_1}(t), \ldots, m_{A,e_n}(t))$.

証明. $f(t) = \mathrm{LCM}(m_{A,e_1}(t), \ldots, m_{A,e_n}(t))$ とおく. $m_{A,e_i}(t) \mid m_A(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ より $f(t) \mid m_A(t)$ である. また, $m_{A,e_i}(t) \mid f(t)$ より $f(A)e_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ だから $O = f(A)(e_1 \cdots e_n) = f(A)$. よって $m_A(t) \mid f(t)$. よって $m_A(t) = f(t)$. (証明終)

よって, $m_{A,e_1}(t), \ldots, m_{A,e_n}(t)$ をすべて求めて最小公倍多項式を求めればそれが $m_A(t)$ に等しい.

例 1.5 例 1.4 と同じ行列に対し, $m_{A,e_1}(t) = m_{A,e_2}(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$, $m_{A,e_3}(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$, $m_{A,e_4}(t) = t - 1$ より $m_A(t) = (t-1)^2(t-2)$.

2　ジョルダン標準形の計算

以下のことがわかっている.

- 固有値 λ の, $p_A(x)$ における重複度 k は $\dim V(A, \lambda)$ に等しい.

- λ の $m_A(x)$ における重複度 e は, 固有値 λ の ジョルダンブロックの最大サイズを表す. $J_e(\lambda)$ は少なくとも一つ存在する

- $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda E)$ が, 固有値 λ の ジョルダンブロックの個数を表す.

- 固有値 λ の ジョルダンブロックのサイズの合計が k に等しい.

これらにより, $n=3$, $n=4$ の場合は以下のようになる.

2.1 $n=3$

- $p_A(x)=(x-\lambda_1)^3 \quad (\dim V(A,\lambda_1)=3)$

  1. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=1 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^3)$
     $V(A,\lambda_1)$ はただ一つのジョルダンブロック $J_3(\lambda_1)$ に対応する. $N=A-\lambda_1 E$ とおく. $N^2 e_1 \neq 0$ なる e_1 をとり, $P=(N^2 e_1\ Ne_1\ e_1)$ とおけば,
     $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

  2. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=2 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^2)$
     $V(A,\lambda_1)$ は, $J_2(\lambda_1)$ が一つ, $J_1(\lambda_1)$ が一つに対応する. $N=A-\lambda_1 E$ とおく. $Ne_1 \neq 0$ なる e_1 をとる. $\dim \mathrm{Ker}N=2$ である. Ne_1 と一次独立な $\mathrm{Ker}N$ の元 e_2 をとり, $P=(Ne_1\ e_1\ e_2)$ とおけば,
     $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

  3. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=3 \quad (m_A(x)=x-\lambda_1)$
     $A=\lambda_1 E.$

- $p_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2) \quad (\dim V(A,\lambda_1)=2)$

  1. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=1 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2))$
     $V(A,\lambda_1)$ はただ一つのジョルダンブロック $J_2(\lambda_1)$ に対応する. $N=A-\lambda_1 E$ とおく. $e_1 \in \mathrm{Ker}N^2$, $Ne_1 \neq 0$ なる e_1, および λ_2 に属する固有ベクトル e_2 をとり, $P=(Ne_1\ e_1\ e_2)$ とおけば,
     $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

2. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=2 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2))$
   λ_1 に属する一次独立な固有ベクトル e_{11}, e_{12} と, λ_2 に属する固有ベクトル e_2 をとり, $P=(e_{11}\ e_{12}\ e_2)$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- $p_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$
  λ_i に属する固有ベクトル e_i $(i=1,2,3)$ をとり, $P=(e_1\ e_2\ e_3)$ とおけば,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

2.2 n=4

くどいので, 最小多項式が重複度をもつ場合のみ説明する.

- $p_A(x)=(x-\lambda_1)^4 \quad (\dim V(A,\lambda_1)=4)$

1. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=1 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^4)$
   $V(A,\lambda_1)$ は $J_4(\lambda_1)$ に対応する. $N=A-\lambda_1 E$ とおく. $N^3 e_1\neq 0$ となる e_1 をとり, $P=(N^3e_1\ N^2e_1\ Ne_1\ e_1)$ とおけば,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

2. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=2$
   $n=4$ **では, この場合のみ** $m_A(x)$ **の計算が必要となる.**
   (a) $m_A(x)=(x-\lambda_1)^3$
   $V(A,\lambda_1)$ は $J_3(\lambda_1)$ 一つと $J_1(\lambda_1)$ 一つに対応する. $N=A-\lambda_1 E$ とおく. $N^2e_1\neq 0$ となる e_1 をとる. N^2e_1 と一次独立な $\mathrm{Ker}N$ の元 e_2 をとり, $P=(N^2e_1\ Ne_1\ e_1\ e_2)$ とおけば,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

   (b) $m_A(x)=(x-\lambda_1)^2$
   $V(A,\lambda_1)$ が $J_2(\lambda_1)$ 二つに対応する. $N=A-\lambda_1 E$ とおく. $Ne_1\neq 0$, $Ne_2\neq 0$, e_1, e_2 が一次独立, かつ $\langle e_1,e_2\rangle\cap \mathrm{Ker}N=\{0\}$ を満たす e_1, e_2 をとる. とり方としては, まず, $\mathbf{C}^4$ の標準基底のなかから $Ne_1\neq 0$ を満たすものを一つとる.

さらに, 残りの標準基底から, $Ne_2 \neq 0$ で, (f_1, f_2) を $\mathrm{Ker}N$ の基底とするとき, (e_1, e_2, f_1, f_2) が一次独立になるものを選べばよい. $P = (Ne_1\ e_1\ Ne_2\ e_2)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

3. $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) = 3$
   $V(A, \lambda_1)$ が $J_2(\lambda_1)$ 一つと $J_1(\lambda_1)$ 二つに対応する. $N = A - \lambda_1 E$ とおく. $Ne_1 \neq 0$ となる e_1 をとる. $\mathrm{Ker}N$ の二元 e_2, e_3 を, Ne_1, e_2, e_3 が一次独立となるようにとる. $P = (Ne_1\ e_1\ e_2\ e_3)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

4. $m_A(x) = x - \lambda_1$
   $A = \lambda_1 E$.

- $p_A(x) = (x - \lambda_1)^3 (x - \lambda_2) \quad (\dim V(A, \lambda_1) = 3)$

1. $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) = 1 \quad (m_A(x) = (x - \lambda_1)^3 (x - \lambda_2))$
   $N = A - \lambda_1 E$ とおく. $N^2 e_1 \neq 0$ となる $e_1 \in \mathrm{Ker}N^3$ をとり, λ_2 に属する固有ベクトルを e_2 とする. $P = (N^2 e_1\ Ne_1\ e_1\ e_2)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2. $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) = 2 \quad (m_A(x) = (x - \lambda_1)^2 (x - \lambda_2))$
   $V(A, \lambda_1)$ は $J_2(\lambda_1)$ が一つ, $J_1(\lambda_1)$ が一つに対応する. $N = A - \lambda_1 E$ とおく. $Ne_1 \neq 0$ となる $e_1 \in \mathrm{Ker}N^2$ をとり, Ne_1 と一次独立な $\mathrm{Ker}N$ の元 e_2 をとる. λ_2 に属する固有ベクトルを e_3 とし, $P = (Ne_1\ e_1\ e_2\ e_3)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

3. $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) = 3 \quad (m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2))$
   対角型.

- $p_A(x) = (x - \lambda_1)^2 (x - \lambda_2)^2 \quad (\dim V(A, \lambda_1) = 2, \dim V(A, \lambda_2) = 2)$

1. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=1$, $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_2 E)=1 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^2)$
   $i=1,2$ とする．$V(A,\lambda_i)$ は $J_2(\lambda_i)$ に対応する．$N_i=A-\lambda_i E$ とおく．e_i を $N_i e_i\neq 0$ なる $\mathrm{Ker}N_i^2$ の元とする．$P=(N_1e_1\ e_1\ N_2e_2\ e_2)$ とおけば，
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & 1 \\ & & & \lambda_2\end{pmatrix}$$
2. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=1$, $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_2 E)=2 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2))$
   $V(A,\lambda_1)$ は $J_2(\lambda_1)$ に対応し，$V(A,\lambda_2)=\mathrm{Ker}(A-\lambda_2 E)$ である．$N=A-\lambda_1 E$ とおく．e_1 を $Ne_1\neq 0$ なる $\mathrm{Ker}N^2$ の元とする．λ_2 に属する一次独立な固有ベクトルを e_2, e_3 とし，$P=(Ne_1\ e_1\ e_2\ e_3)$ とおけば，
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2\end{pmatrix}$$
3. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=2$, $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_2 E)=2 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2))$
   対角型.

- $p_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \quad (\dim V(A,\lambda_1)=2)$

1. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=1 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)(x-\lambda_3))$
   $V(A,\lambda_1)$ は $J_2(\lambda_1)$ に対応する．$N=A-\lambda_1 E$ とおく．e_1 を $Ne_1\neq 0$ なる $\mathrm{Ker}N^2$ の元とする．λ_2, λ_3 に属する固有ベクトルをそれぞれ e_2, e_3 とし，$P=(Ne_1\ e_1\ e_2\ e_3)$ とおけば，
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3\end{pmatrix}$$
2. $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)=2 \quad (m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3))$
   対角型.

例 2.1
$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -24 \\ 0 & -8 & -81 \\ 0 & 1 & 10\end{pmatrix},\quad p_A(x)=m_A(x)=(x-1)^2(x-2).$$
$$N=A-E=\begin{pmatrix}1 & -3 & -24 \\ 0 & -9 & -81 \\ 0 & 1 & 9\end{pmatrix},\quad N^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
$e_1\in \mathrm{Ker}N^2$, $Ne_1\neq 0$ なる e_1 を $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ と選ぶと $Ne_1=\begin{pmatrix}-3\\-9\\1\end{pmatrix}$．$e_2\in \mathrm{Ker}(A-2E)$ を $e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と選び，$P=(Ne_1\ e_1\ e_2)=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

例 2.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -9 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = m_A(x) = (x-1)^3.$$

$$N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -81 \\ -1 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$N^2 e_1 \neq 0$ なる e_1 を $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と選ぶと $Ne_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $N^2 e_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P = (N^2 e_1\ Ne_1\ e_1) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例 2.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = (x-1)^4, m_A(x) = (x-1)^2.$$

$$N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\dim \mathrm{Ker} N = 3$ より, $J_2(1)$ が一つ, $J_1(1)$ が二つ. $Ne_1 \neq 0$ なる e_1 として $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と選ぶ

と $Ne_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker} N$ から $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ.

$$P = (Ne_1\ e_1\ e_2\ e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ とおけば,}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_A(t) = (t-1)^4.$$

$$N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Ker}N = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$ および $N^2 = O$ より $m_A(t) = (t-1)^2$ となり，A のジョルダン標準形は $J_2(1)$ を二つ持つ．$Ne_1, Ne_2 \neq 0$，e_1, e_2 が一次独立で，$\langle e_1, e_2 \rangle \cap \mathrm{Ker}N = \{0\}$ を満たす e_1, e_2 として $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば $Ne_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，$Ne_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

$$P = (\, Ne_1 \quad e_1 \quad Ne_2 \quad e_2 \,) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意 2.1 $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととると，$e_1 - 2e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}N$ となり，$\mathrm{Ker}N^2 = \mathrm{Ker}N \oplus \langle e_1, e_2 \rangle$ を満たすように e_1, e_2 を選べという定理 3.6 の指示に反する．

例 2.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = (x-1)^4.$$

$$N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. $a \neq 0$

   $N^3 \neq O$ より $m_A(x) = (x-1)^4$．よって $J_4(1)$ が一つ．$N^3 e_1 \neq 0$ なる e_1 として $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と選ぶと $Ne_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $N^2 e_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ $N^3 e_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$P = (N^3 e_1 \; N^2 e_1 \; Ne_1 \; e_1) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば，} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $a=0$

$N^3=O$ より $m_A(x)=(x-1)^3$. よって $J_3(1)$ が一つ, $J_1(1)$ が一つ. $N^2e_1\neq 0$ なる e_1 として $e_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ と選ぶと $Ne_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $N^2e_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Ker$N$ から N^2e_1 と一次独立な元 $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ を選んで $P=(N^2e_1\ Ne_1\ e_1\ e_2)=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ とおけば,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

注意 2.2 例えば $n=3$, $m_A(x)=(x-\lambda)^3$ の場合, e_1 を固有ベクトルとして, $(A-\lambda E)e_2=e_1$, $(A-\lambda E)e_3=e_2$ を満たす e_2, e_3 を求めて $P=(e_1\ e_2\ e_3)$ とすることもできる. しかし, この方法を $n=3$, $p_A(x)=(x-\lambda)^3$, $m_A(x)=(x-\lambda)^2$ の場合に適用しようとすると, やや複雑な計算を必要とする. (次の例のように, $(A-\lambda E)e_2=e_1$ が無条件では解けない.) n がさらに大きくなると, より複雑化する. このような場合, $N^ke\neq 0$ となる e を選んで $N^{k-1}e,\dots,Ne,e$ を求める方が簡明であろう. (前例で試してみてほしい.)

例 2.6

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad p_A(x)=(x-1)^3,\quad m_A(x)=(x-1)^2.$$

$$N=A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Ker$N=\{\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}\}$ である. $e_1=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$ とおき, $Ne_2=e_1$ となる e_2 を求める. $e_2=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ とおくと, $Ne_2=\begin{pmatrix}0\\u\\-u\end{pmatrix}$ より, $a=-b$ が必要. このとき, たとえば $e_2=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ と選べば $Ne_2=e_1$ となる. $a=1$ としてよいから, 結局 $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. e_3 として, e_1 と独立な固有ベクトル $e_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ を選べば, $P=(e_1\ e_2\ e_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

3 練習問題

以下の行列のジョルダン標準形, 変換行列, 最小多項式を求めよ. (いずれも, 固有値をただ一つだけ持つ行列である.)

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$