# 線形代数学III 講義メモ (その3)

野呂 正行

## 1 行列のベキ

正方行列 $A$ が対角化可能のとき, 変換行列 $P$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ より $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$ と書ける. $A$ が対角化可能でなくても, ジョルダン標準形のベキが計算できれば $A^k$ の一般形を求めることができる.

**定理 1.1** $J_k(\lambda)^i = \begin{pmatrix} \lambda^i & \binom{i}{1}\lambda^{i-1} & \cdots & \binom{i}{k-1}\lambda^{i-k+1} \\ & \lambda^i & \cdots & \binom{i}{k-2}\lambda^{i-k+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda^i \end{pmatrix}$

証明. $E_j$ を $j$ 次単位行列とすると $J_k(\lambda) = \lambda E_k + N$, $N = \begin{pmatrix} O & E_{k-1} \\ 0 & O \end{pmatrix}$ で, $E_kN = NE_k$ より $J_k(\lambda)^i = \lambda^i E_k + \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\lambda^{i-1}N + \cdots + \begin{pmatrix} i \\ k-1 \end{pmatrix}\lambda^{i-k+1}N^{k-1}$. $N^j = \begin{pmatrix} O & E_{k-j} \\ O & O \end{pmatrix}$ $(j < k)$, $N^j = O$ $(j \geq k)$ より $J_(\lambda)^i$ は上の形になる. (証明終)

**例 1.2** $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ により $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $J^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$. $A^k = \begin{pmatrix} -(k+1)2^k + 2 & -\frac{1}{2}k2^k & -2^k + 1 \\ (2k+4)2^k - 4 & (k+1)2^k & 2 \cdot 2^k - 2 \\ (2k+2)2^k - 2 & k2^k & 2 \cdot 2^k - 1 \end{pmatrix}$.

## 2 定数係数同次線形差分方程式系

$x = (x(k))_{k=0,1,\ldots}$ $(x(k) \in \mathbf{C}^n)$ を $\mathbf{C}^n$ に値をとる数列とする. このような数列全体は, $(x(k)) + (y(k)) = (x(k) + y(k))$, $c(x(k)) = (cx(k))$ $(c \in \mathbf{C})$ により $\mathbf{C}$ 線形空間となる. $A \in M_n(\mathbf{C})$ に対し,

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

を定数係数同次線形差分方程式系という. (1) を満たす数列 $x$ を (1) の解という. (1) の解全体を $S$ とおく.

**定理 2.1** $S$ は $n$ 次元の $\mathbf{C}$ 線形空間をなす. $E = (x_1, \ldots, x_n)$ $(x_1, \ldots, x_n \in S)$ として $(x_1(0), \ldots, x_n(0))$ が $\mathbf{C}^n$ の基底になるものをとれば $E$ は $S$ の基底となる.

証明. $x, y \in S$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ ならば $z = c_1 x + c_2 y$ により数列 $z$ を定めれば $Az(k) = A(c_1 x(k) + c_2 y(k)) = c_1 Ax(k) + c_2 Ay(k) = c_1 x(k+1) + c_2 y(k+1) = z(k+1)$ より $z \in S$. よって $S$ は $\mathbf{C}$ 線形空間である. $\phi : S \to \mathbf{C}^n$ を $\phi(x) = x(0)$ で定めれば, $\phi$ は線形写像である. このとき, $\phi(x) = x(0) = 0$ ならば, 任意の $k$ に対し $x(k) = 0$ より $\phi$ は単射. また, 任意の $v \in \mathbf{C}^n$ に対し $x(k) = A^k v$ により数列 $x$ を定めれば, $x \in S$ より $\phi$ は全射. よって $S \simeq \mathbf{C}^n$. この同型により $x_1, \ldots, x_n \in S$ が $S$ の基底 $\Leftrightarrow$ $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)$ が $\mathbf{C}^n$ の基底 $\Leftrightarrow$ $x_1(0), \ldots, x_n(0)$ が $\mathbf{C}^n$ の基底. (証明終)

**定理 2.2** $P$ を正則行列とする. $B = P^{-1}AP$ に対し $PB^k$ の第 $j$ 列 $x_j(k)$ により定まる数列 $x_j = (x_j(k))_{k=0,1,\ldots}$ $(j = 1, \ldots, n)$ は $S$ の基底をなす.

$PB^k = (x_1(k)\ x_2(k)\ \cdots\ x_n(k))$ で, $PB^{k+1} = PBP^{-1}PB^k = APB^k$ より $x_j(k+1) = Ax_j(k)$ だから $x_1, \ldots, x_n \in S$. また $x_j(0)$ は $P$ の第 $j$ 列 に等しく, $P$ が正則より, 前定理より $(x_1, \ldots, x_n)$ は $S$ の基底.

**系 2.3** $A$ のジョルダン標準形を $J$, 変換行列を $P$ とする. $PJ^k$ の第 $j$ 列により定まる数列を $x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ とすれば, $(x_1, \ldots, x_n)$ は $S$ の基底.

$A^k$ の各列は明らかに $S$ の基底を与えるが, $A^k$ の計算には $P^{-1}$ が必要となる. 系により, 基底を求めるためには $P^{-1}$ は不要であることがわかる.

**例 2.4** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \\ w(k) \end{pmatrix}$ とするとき, $x(k+1) = Ax(k)$ の解空間の基底を求める. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $J^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$ より $PJ^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(-1)^k \\ 0 & (-1)^k & -k(-1)^k \\ 0 & -(-1)^k & (k-1)(-1)^k \end{pmatrix}$. よって, $x_1(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^k \\ -(-1)^k \end{pmatrix}$, $x_3(k) = \begin{pmatrix} 2(-1)^k \\ -k(-1)^k \\ (k-1)(-1)^k \end{pmatrix}$ とおくと, $(x_1, x_2, x_3)$ は解の基底.

# 3　高階差分方程式

数列 $(u(k))_{k=0,1,\ldots}$ $(u(k) \in \mathbf{C})$ に対する方程式

$$u(k+n) + a_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + a_1 u(k+1) + a_0 u(k) = 0 \quad (a_i \in \mathbf{C}, a_0 \neq 0) \qquad (2)$$

を $n$ 階斉次線形差分方程式と呼ぶ. この方程式は,

$x(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k+n-1) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ とおくと $\mathbf{C}^n$ に値をとる数列 $(x(k))$ に対する方程式

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{3}$$

の解となる. 逆に (3) の解の第一成分は (2) の解となり, (2) と (3) の解は 1 対 1 に対応する. よって (3) を解けばよいが, 以下で示すような簡便法がある.

(2) の解全体を $V$ とおくと, $V$ は $\mathbf{C}$ 線形空間となる. (2) の解 $(u(k))$ は, 初期値 $(u(0), \ldots, u(n-1)) \in \mathbf{C}^n$ を与えれば一意的に決まるので, $V \simeq \mathbf{C}^n$ である. $u_i = (u_i(k))$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ を $u_i(j) = \delta_{ij}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ により定まる解とすれば, $E = (u_0, \ldots, u_{n-1})$ は $V$ の基底となる.

さて, $x = (x(k)) \in V$ に対し $Tx = (x(k+1))$ と定めれば, $Tx \in V$ である. $T$ は $\mathbf{C}$-線形で, $T : V \to V$ の $E$ による表現行列は $A$ に等しい.

**定理 3.1** $p_A(t) = m_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ が成り立つ.

証明略.

**系 3.2** $p_A(t) = m_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_l)^{m_l}$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ は相異なる) とすれば, $A$ のジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$

一般固有空間分解により $V = V(T, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(T, \lambda_l)$ なので, 各 $V(T, \lambda_i)$ の基底を求めて集めれば $V$ の基底を得る.

**定理 3.3** $\lambda$ を固有値, $m$ その $p_A(t)$ における重複度とするとき, $v_i = (v_i(k))$ $(i = 0, \ldots, m-1)$, $v_i(k) = k^i \lambda^k$ とすれば $(v_0, \ldots, v_{m-1})$ は $V(T, \lambda)$ の基底.

証明. 1. $v_i \in V$.

$u = v_i$ とすると

$$(2) \text{ の左辺} = (k+n)^i \lambda^{k+n} + a_{n-1}(k+n-1)^i \lambda^{k+n-1} + \cdots + a_0 k^i \lambda^k \tag{4}$$

である. ここで,

$$f(t) = t^k p_A(t) = t^{n+k} + a_{n-1}t^{n+k-1} + \cdots + a_0 t^k$$

とおくと,

$$t\frac{d}{dt}f(t) = (n+k)t^{n+k} + (n+k-1)a_{n-1}t^{n+k-1} + \cdots + ka_0 t^k.$$

これを繰り返し,

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^i f(t) = (n+k)^i t^{n+k} + (n+k-1)^i a_{n-1} t^{n+k-1} + \cdots + k^i a_0 t^k$$

を得る．すなわち (4) の右辺は $\left(t\frac{d}{dt}\right)^i f(t)$ の $t$ に $\lambda$ を代入したものである．ここで, $f(t) = t^k p_A(t)$ は $(t-\lambda)^m$ で割り切れるから, $i < m$ のとき $\left(t\frac{d}{dt}\right)^i f(t)$ は $(t-\lambda)^{m-i}$ で割り切れる．よって $t = \lambda$ において $\left(t\frac{d}{dt}\right)^i f(t) = 0$, すなわち $v_i \in V$ である．

2. $(T-\lambda)^{i+1} v_i = 0$ $(i = 0, \ldots, m-1)$.

   $i$ に関する帰納法で示す．$i = 0$ のとき, $(Tu_0)(k) = \lambda^{k+1}$ より $Tu_0 = \lambda u_0$. よって $(T-\lambda)u_0 = 0$ より $u_0 \in V(T, \lambda)$. $i-1$ まで OK とする : $(T-\lambda)u_0 = 0, \ldots, (T-\lambda)^i u_{i-1} = 0$.

$$Tu_i(k) - \lambda u_i(k) = (k+1)^i \lambda^{k+1} - k^i \lambda^{k+1} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} k^j \lambda^{k+1}$$

   $(T-\lambda)u_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \lambda u_j$. よって, 帰納法の仮定により $(T-\lambda)^{i+1} u_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \lambda (T-\lambda)^i u_j = 0$ となり, $i$ でも成り立つ.

3. $(v_0, \ldots, v_{m-1})$ は $V(T, \lambda)$ の基底.

   $\dim V(T, \lambda) = m$ より, $(v_0, \ldots, v_{m-1})$ が一次独立であることを言えばよい. $c_0 v_0 + \cdots + c_{m-1} v_{m-1} = 0$ とする．$(T-\lambda)^{m-1}$ を作用させれば 2. より $(T-\lambda)^{m-1} v_i = 0$ $(i = 0, \ldots, m-2)$ より $c_{m-1}(T-\lambda)^{m-1} v_{m-1} = 0$. ここで, 再び 2. より $(T-\lambda)^{m-1} v_{m-1} = cu_0$ $(\exists c \neq 0)$ がわかるので $c_{m-1} = 0$. 以下これを繰り返し $c_{m-2} = \cdots = c_0 = 0$ がいえる.

(証明終)

以上をまとめて次をうる.

**定理 3.4** 方程式 (2) に対し, $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ (特性方程式) の根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, 重複度をそれぞれ $m_1, \ldots, m_l$ とすれば, $\{(\lambda_1^k), \ldots, (k^{m_1-1}\lambda_1^k), \ldots, (\lambda_l^k), \ldots, (k^{m_l-1}\lambda_l^k)\}$ は解空間の基底をなす.

# 4 行列の指数関数

$M_n(\mathbf{C})$ を $n^2$ 次元の $\mathbf{C}$ 線形空間と考え, $A = (a_{ij})$ のノルム (長さ) $||A||$ を $\sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ で定義する．また, $x = (x_i) \in \mathbf{C}^n$ については $||x|| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ と定義する．

**定理 4.1**

1. $||cA|| = |c|||A||$ $(c \in \mathbf{C})$.
2. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.
3. $||Ax|| \leq ||A||||x||$ $(x \in \mathbf{C}^n)$.
4. $||AB|| \leq ||A||||B||$.

**注意 4.2** 教科書 p.262 のように, $||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||$ と定義しても同様の性質をもつ. 以下の議論では, どちらのノルムを用いてもよい.

ノルムを使って $d(A,B)=||A-B||$ により $M_n(\mathbf{C})$ に距離が定義できる．この距離により $M_n(\mathbf{C})$ は完備な距離空間 (コーシー列が収束する) となる．特に, 行列の収束に関して次は有用である．

**定理 4.3** $||A_i|| \le \alpha_i$ かつ $\sum \alpha_i$ が収束すれば $\sum A_i$ も収束する．

**定理 4.4** $A \in M_n(\mathbf{C})$ に対し $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$ は収束する．その和を $\exp(A)$ と書く．

証明. $||\frac{1}{i!}A^i|| \le \frac{1}{i!}||A||^i$ で $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}||A||^i$ は収束するから前定理により OK. (証明終)

**定理 4.5**

1. $AB=BA$ ならば $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.
2. $\exp(-A)=(\exp(A))^{-1}$.
3. $\exp(P^{-1}AP)=P^{-1}\exp(A)P$.
4. $\exp\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(A_k) \end{pmatrix}$

**定理 4.6** $\exp tJ_k(\lambda) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

証明. $J_k(\lambda)=\lambda E+N$, $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ より $(tJ_k(\lambda))^i = t^i \displaystyle\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\lambda^{i-j}N^j$. 実際にはこの和は $j \le \min(i,k-1)$ までの和である．よって,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(tJ_k(,\lambda))^i = \sum_{j=0}^{k-1}N^j\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i}{j}t^i\lambda^{i-j}N^j = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}N^j\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{(i-j)!}(\lambda t)^{i-j} = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}t^jN^j.$$

(証明終)

**系 4.7** $A \in M_n(\mathbf{C})$ に対し $\exp tA$ が, $A$ のジョルダン標準形により計算できる．

## 5　定数係数斉次線形常微分方程式系

$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{C})$ に対し, $n$ 個の未知関数 $x_i(t)$ に関する方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad \text{あるいは} \quad \frac{dx}{dt}=Ax \quad (x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}) \tag{5}$$

を定数係数斉次線形常微分方程式系と呼ぶ.

**定理 5.1** $A\in M_n(\mathbf{C})$ に対し $A(t)=\exp(tA)$ とおくと, $\frac{d}{dt}A(t)=A\cdot A(t)$.

証明. $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ とおけば $\exp(tA)$ の絶対収束性より $A(t)$ の $(i,j)$ 成分 $A_{ij}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a_{ij}^{(k)}t^k$ も絶対収束する. よって, 項別微分可能で $\displaystyle\frac{d}{dt}A_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}a_{ij}^{(k)}t^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a_{ij}^{(k+1)}t^k$ より $\displaystyle\frac{d}{dt}A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^{k+1}t^k=A\cdot A(t)$. (証明終)

**定理 5.2** 任意の $c\in\mathbf{C}^n$ に対し, $x(t)=\exp(tA)c$ は (5) の $x(0)=c$ を満たす一意解を与える.

証明. $\frac{dx}{dt}=A\exp(tA)c=Ax$, $x(0)=\exp(0\cdot A)c=c$ より $x(t)$ は $x(0)=c$ なる解である. 一意性を示す. $y(t)$ も $y(0)=c$ なる解とする. $z=\exp(-tA)y$ とおくと, $\frac{dz}{dt}=-A\exp(-tA)y+\exp(-tA)Ay=0$ かつ $z(0)=y(0)=c$ より $z(t)\equiv c$. すなわち, $y=exp(tA)c$ となり $x=y$ である. (証明終)

**系 5.3** (5) の解空間 $S$ は $S\ni x(t)\mapsto x(0)\in\mathbf{C}^n$ により $\mathbf{C}^n$ と同型で, $P\in M_n(\mathbf{C})$ が正則なら $\exp(tA)P$ の列ベクトル全体は $S$ の基底となる. 特に, $J=P^{-1}AP$ なら $\exp(tA)P=P\exp(tJ)$ より $P\exp(tJ)$ の列ベクトル全体は $S$ の基底となる.

## 6　高階斉次線形常微分方程式

スカラー値の未知関数 $(u(t)$ に対する方程式

$$u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+a_1u'+a_0u=0 \quad (a_i\in\mathbf{C},a_0\neq 0) \tag{6}$$

を $n$ 階斉次線形常微分方程式と呼ぶ. この方程式は,

$x=\begin{pmatrix}u\\ \vdots\\ u^{(n-1)}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1\\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{pmatrix}$ とおくと $\mathbf{C}^n$ に値をとる関数 $x$ に対する方程式

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{7}$$

の解となる．逆に (7) の解の第一成分は (6) の解となり, (6) と (7) の解は 1 対 1 に対応する．よって (7) を解けばよいが, 高階差分方程式と同様, 以下のように解が計算できる．

(6) の解全体を $V$ とおくと, $V$ は $\mathbf{C}$ 線形空間となる．(6) の解 $u$ は, 初期値 $(u(0),\ldots,u^{(n-1)}(0))\in\mathbf{C}^n$ を与えれば一意的に決まる (これは, (7) の解との 1 対 1 対応からわかる). よって $V\simeq\mathbf{C}^n$ である．$u_i(t)$ $(i=0,\ldots,n-1)$ を $u_i^{(j)}(0)=\delta_{ij}$ $(j=0,\ldots,n-1)$ により定まる解とすれば, $E=(u_0,\ldots,u_{n-1})$ は $V$ の基底となる．

さて, $x\in V$ に対し $Tx=x'$ と定めれば, $Tx\in V$ である．$T$ は $\mathbf{C}$-線形で, $T:V\to V$ の $E$ による表現行列は $A$ に等しい．

**定理 6.1** $p_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_l)^{m_l}$ $(\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ は相異なる$)$ とする．このとき, $B_i=\{e^{\lambda_i t},te^{\lambda_i t},\ldots,t^{m_i-1}e^{\lambda_i t}\}$ は $V(T,\lambda_i)$ の基底である． よって $B=B_1\cup\cdots\cup B_l$ は $V=V(T,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(T,\lambda_l)$ の基底である．

証明. $f(x)=\sum c_i x^i$ $(c_i\in\mathbf{C})$ に対し, $f(\frac{d}{dt})u=\sum c_i\frac{d^i}{dt^i}u$ と定義すると, $f(x)=g(x)h(x)$ のとき $f(\frac{d}{dt})u=g(\frac{d}{dt})(h(\frac{d}{dt})u)$ が成り立つ． よって, $p_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_l)^{m_l}$ ならば $u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+a_1u'+a_0u=p_A(\frac{d}{dt})u=\prod_{j\neq i}(\frac{d}{dt}-\lambda_j)^{m_j}((\frac{d}{dt}-\lambda_i)^{m_i}u)$. $u=t^ke^{\lambda_i t}$ $(k<m_i)$ とすれば, $(\frac{d}{dt}-\lambda_i)u=kt^{k-1}e^{\lambda_i t}$ より $(\frac{d}{dt}-\lambda_i)^{m_i}u=0$. これは, $u\in V$ かつ $u\in V(A,\lambda_i)$ を意味する．$B_i$ が一次独立であることも明らかである. (証明終)