線形代数学III 講義メモ (その4)

野呂 正行

1 多項式行列の掃き出し

定義 1.1 多項式行列に対する以下の操作を, 多項式の範囲内での基本変形と呼ぶ.

1. 行 (列) を入れ換える.
2. ある行 (列) を 0 でないスカラー倍する.
3. ある行 (列) を多項式倍したものを別の行 (列) に加える.

これらはすべて, 行列式が 0 でないスカラーであるような多項式行列 (したがって, 多項式の範囲で可逆) を右または左からかけることに相当する.

定理 1.2 任意の多項式行列 $A = (a_{ij})$ は, 多項式の範囲内での基本変形により,
$$D = \begin{pmatrix} d_1(t) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_k(t) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
という形にできる. この変形は, 多項式範囲で可逆な多項式行列 P, Q により $PAQ = D$ と書ける.

証明.

$$A \neq O \text{ ならば, 基本変形により第 1 行, 第 1 列の (1,1) 成分以外を 0 にできる} \qquad (1)$$

を示せばよい. まず, 行, 列交換により, 0 でない a_{ij} のうち次数が最小のものを (1,1) 成分に移動することができる. さらに, $a_{i1} = q_i a_{11} + r_i$ ($r_i = 0$ または $\deg r_i < \deg a_{11}$) を満たす q_i, r_i を求め, 第 i 行から第 1 行の q_i 倍を引くと, $a_{i1} = r_i$ となる. 同様に第 1 列も掃き出す. すると, (1) が成り立つか, そうでない場合には, $\deg a_{11}$ より小さい次数をもつ 0 でない成分が生ずる. 後者の場合は, この手順を繰り返せば, 有限回の後に (1) が成り立つ.

行基本変形の積を P, 列基本変形の積を Q と書けば, $PAQ = D$ であり, P, Q の行列式は 0 でないスカラーだから, 多項式の範囲で可逆である. (証明終)

系 1.3 *A を n 次正方行列とするとき, 多項式の範囲で可逆な多項式行列 $P(t)$, $Q(t)$ および 0 でない多項式またはスカラー $d_1(t), \ldots, d_n(t)$ が存在して,*
$$P(t)(A - tE)Q(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t) \end{pmatrix}.$$

証明. $\det(P(t)(A-tE)Q(t)) = cp_A(t)$ $(\exists c \neq 0)$ より, 前定理の D の行列式は 0 でないから, D の対角成分は全て, 0 でない多項式またはスカラーとなる. (証明終)

定義 1.4 $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{C}[t]^n$ に対し, $f(t) = f_0 + tf_1 + \cdots + t^k f_k$ $(f_i \in \mathbf{C}^n)$ と書く時, $f(A) = f_0 + Af_1 + \cdots + A^k f_k \in \mathbf{C}^n$ と定義する. ($f(t) \in \mathbf{C}[t]$ への行列の代入 $f(A)$ とは異なることに注意.)

定理 1.5 $f(t) \in \mathbf{C}[t]^n$ に対し $f(A) = 0 \Leftrightarrow g(t) \in \mathbf{C}[t]^n$ が存在して $f(t) = (A-tE)g(t)$.

証明. $f(t) - f(A) = (f_0 + tf_1 + \cdots + t^k f_k) - (f_0 + Af_1 + \cdots + A^k f_k) = (tE - A)f_1 + \cdots + (t^k E - A^k)f_k = (tE - A)(f_1 + (tE + A)f_2 + \cdots + (t^{k-1}E + t^{k-2}A + \cdots + A^{k-1})f_k)$ より $f(A) = 0$ ならば $g(t) = f_1 + (tE + A)f_2 + \cdots + (t^{k-1}E + t^{k-2}A + \cdots + A^{k-1})f_k$ とおけば $f(t) = (A - tE)g(t)$. 逆に $f(t) = (A - tE)g(t)$ ならば, $g(t) = g_0 + tg_1 + \cdots + t^l g_l$ とすると $(A - tE)g(t) = Ag_0 + t(Ag_1 - g0) + \cdots + t^l(Ag_l - g_{l-1}) - t^{l+1}g_l$ より $f(A) = Ag_0 + A(Ag_1 - g0) + \cdots + A^l(Ag_l - g_{l-1}) - A^{l+1}g_l = 0$. (証明終)

多項式の範囲で可逆な $P(t), Q(t)$ により $P(t)(A-tE)Q(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t) \end{pmatrix}$ と書くと, $A-tE = P^{-1}(t)\begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t) \end{pmatrix} Q^{-1}(t)$. $P^{-1}(t) = (p_1(t)\ \cdots\ p_n(t))$ により $p_i(t) \in \mathbf{C}[t]^n$ を定義すると, $(p_1(t), \ldots, p_n(t))$ は $\mathbf{C}[t]$ 上一次独立, すなわち, 多項式 $h_1(t), \ldots, h_n(t)$ が $h_1(t)p_1(t) + \cdots + h_n(t)p_n(t) = 0$ を満たすなら, $h_1(t) = \cdots = h_n(t) = 0$.

定理 1.6 $f(t) \in \mathbf{C}[t]^n$ が $f(A) = 0$ を満たす $\Leftrightarrow f(t) \in \langle d_1p_1, \ldots, d_np_n \rangle = \{h_1d_1p_1 + \cdots + h_nd_np_n \mid h_1, \ldots, h_n \in \mathbf{C}[t]\}$.

証明. 定理 1.5 より

$$\begin{aligned} f(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(t) = (A-tE)g(t) \quad (\exists g(t) \in \mathbf{C}[t]^n) \\ &\Leftrightarrow \quad f(t) = (p_1(t)\ \cdots p_n(t)) \begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t) \end{pmatrix} Q^{-1}(t)g(t) \quad (\exists g(t) \in \mathbf{C}[t]^n) \\ &\Leftrightarrow \quad f(t) = (d_1(t)p_1(t)\ \cdots d_n(t)p_n(t))h(t) \quad (\exists h(t) \in \mathbf{C}[t]^n). \end{aligned}$$

最後の同値は $Q(t)$ が多項式範囲で可逆なことによる. 最後の条件は, $f(t) \in \langle d_1p_1, \ldots, d_np_n \rangle = \{h_1d_1p_1 + \cdots + h_nd_np_n \mid h_1, \ldots, h_n \in \mathbf{C}[t]\}$ を意味する. (証明終)

注意 1.7 定理より, $f(t) \in \mathbf{C}[t]^n$ が $f(A) = 0$ を満たすとき $f(t) = h_1d_1p_1 + \cdots + h_nd_np_n$ $(h_i \in \mathbf{C}[t])$ と書けるが, $(p_1, \ldots, p_n)$ の一次独立性によりこのような h_i は一意的.

定理 1.8 多項式の範囲で可逆な多項式行列 P, Q により $P(A-tE)Q = \begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t) \end{pmatrix}$ とし, $P^{-1}(t) = (p_1(t)\ \cdots\ p_n(t))$ とする. $m_i = \deg d_i(t)$ とし, $v_{ij} \in \mathbf{C}^n$ $(i = 1, \ldots, n, j = 0, \ldots, m_i - 1)$ を $v_{ij} = A^j p_i(A)$ により定義すれば, $(v_{ij})_{i=1,\ldots,n,j=0,\ldots,m_i-1}$ は $\mathbf{C}^n$ の基底.

証明. $\det(A-tE)=cd_1\cdots d_n$ $(c\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$ より $m_1+\cdots+m_n=\deg p_A(t)=n$ だから v_{ij} は全部で n 個ある. これらが一次独立であることを言えばよい. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i-1}c_{ij}v_{ij}=0$ とする.

$$\sum_{j=0}^{m_i-1}c_{ij}v_{ij}=\sum_{j=0}^{m_i-1}c_{ij}A^jp_i(A)=f_i(A)p_i(A)\quad(f_i(t)=\sum_{j=0}^{m_i-1}c_{ij}t^j)$$

より $f(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f_i(t)p_i(t)$ とおけば $f(A)=0$. よって, $f(t)\in\langle d_1p_1,\ldots,d_np_n\rangle$. よって, 係数の一意性 (注意 1.7) により $f_i=h_id_i$ $(\exists h_i\in\mathbf{C}[t])$. よって $f_i=0$ または $\deg f_i\geq\deg d_i=m_i$. 一方で $\deg f_i<m_i$ より $h_i=0$ よって $f_i(t)=0$ すなわち $c_{ij}=0$. (証明終)

さて, $d_ip_i\in\langle d_1p_1,\ldots,d_np_n\rangle$ より, $d_i(A)p_i(A)=0$ $(i=1,\ldots,n)$ が成り立つ. よって $\deg d_i=0$ すなわち d_i が 0 でない定数の場合 $p_i(A)=0$ である. また, $\deg d_i=m_i>0$ なる i については, $V_i=\langle v_{i0},\ldots,v_{i,m_i-1}\rangle$ が A-不変な部分空間となる. これは, $d_i(t)=a_{m_i}t^{m_i}+\cdots+a_0$ $(a_{m_i}\neq 0)$ とすれば, $d_i(A)p_i(A)=0$ より $A^{m_i}p_i(A)\in\langle p_i(A),\ldots,A^{m_i-1}p_i(A)\rangle$ が成り立つからである. 基底 $(v_{i0},\ldots,v_{im_i-1})$ に関する $A|_{V_i}$ の行列は $C_i=\begin{pmatrix}0 & & & c_0\\ 1 & 0 & & c_1\\ & & \ddots & \\ & & 1 & c_{m_i-1}\end{pmatrix}$ (コンパニオン行列) の形で, 定理 1.8 の基底に関する A の行列は $\begin{pmatrix}C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_n\end{pmatrix}$ となる (ただし, $m_i>0$ となるもののみ現れる). 以上により次の定理が示された.

定理 1.9 *多項式の範囲で可逆な多項式行列 P,Q により $P(A-tE)Q=\begin{pmatrix}d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t)\end{pmatrix}$, $\deg d_1=\cdots=\deg d_l=0$, $\deg d_i>0$ $(i=l+1,\ldots,n)$ となるとき, 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}C_{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_n\end{pmatrix}$ を満たす. ただし, C_i は $\deg d_i$ 次のコンパニオン行列であり, その固有多項式は定数倍を除いて d_i に等しい.*

コンパニオン行列 C のジョルダン標準形は, 各固有値 λ, 固有多項式における λ の重複度 m に対し, $J_m(\lambda)$ を一つずつもつ. よって, $N=C-\lambda E$ に対し $N^{m-1}e\neq 0$ を求めて基底 $(N^{m-1}e,\ldots,Ne,e)$ を作るか, 固有ベクトル $f_1=f$ に対し $Nf_2=f_1$, $Nf_3=f_2\ldots$ なる f_2, $f_3,\ldots,f_m$ を順に求めて基底 $(f_1,\ldots,f_m)$ を作れば $J_m(\lambda)$ を与える部分基底を得る. これらを集めれば, コンパニオン行列をジョルダン標準形に変換できる.

多項式の範囲での基本変形により最小多項式も得られる.

定理 1.10 *多項式の範囲で可逆な多項式行列 P,Q により $P(A-tE)Q=D=\begin{pmatrix}d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t)\end{pmatrix}$ ならば, $m_A(t)$ は $d_1,\ldots,d_n$ の最小公倍多項式に等しい.*

証明. $(e_1,\dots,e_n)$ を $\mathbf{C}^n$ の標準基底とする. $f(t)\in\mathbf{C}[t]$ に対し $f(A)=O \Leftrightarrow f(A)e_1=0,\dots,f(A)e_n=0 \Leftrightarrow f_j(t)=f(t)e_j$ に対し $f_j(A)=0\ (j=1,\dots,n) \Leftrightarrow f_j(t)\in\langle d_1p_1,\dots,d_np_n\rangle$. 最後の条件は, $f_j(t)=h_{1j}d_1p_1+\cdots+h_{nj}d_np_n$ を満たす h_{ij} に対し $H=(h_{ij})$ とおけば $f(t)E=P^{-1}DH$ と書けることを意味する. このとき, $f(t)P=DH$ より $f(t)E=DHP^{-1}$, 対角成分を比較すれば f は $d_1,\dots,d_n$ で割り切れる. 逆に, f が $d_1,\dots,d_n$ で割り切れるとき, $H=\begin{pmatrix} f/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f/d_n \end{pmatrix}P$ とおけば $f(t)E=DHP^{-1}$, これより $f(t)E=P^{-1}DH$ となり $f(A)=O$ を満たす. $d_1,\dots,d_n$ で割り切れる最小次数の多項式がこれらの最小公倍多項式だから定理は成立する. (証明終)

最後に, 単因子について述べる.

定理 1.11 多項式行列 $A=\begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t)\end{pmatrix}$ は, 多項式の範囲での基本変形により $\begin{pmatrix} g(t) & 0 \\ 0 & l(t)\end{pmatrix}$ に変形できる. ただし $g(t)=\mathrm{GCD}(a,b)$ は a,b の最大公約多項式, $l(t)=\mathrm{LCM}(a,b)$ は a,b の最小公倍多項式である.

証明. $g=\mathrm{GCD}(a,b)$ とおけば, 多項式 u,v が存在して $g=ua+vb$ と書ける. また $l=\mathrm{LCM}(a,b)$ とおけば, $l=ab/g$ である.

$$A\to\begin{pmatrix} a & ua+gb \\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & g \\ 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & g \\ -ab/g & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & g \\ -l & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & g \\ -l & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & l\end{pmatrix}$$

により A は $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & l\end{pmatrix}$ に基本変形できる. (証明終)

系 1.12 $\begin{pmatrix} f_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & f_n(t)\end{pmatrix}$ $(f_i\neq 0)$ は多項式の範囲での基本変形により $\begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t)\end{pmatrix}$ $(d_1\mid d_2\mid\ \cdots\ \mid d_n)$ なる形に変形できる.

証明. (1,1) 成分と (2,2) 成分, (1,1) 成分と (3,3) 成分, ...,(1,1) 成分と (n,n) 成分に対し順に前定理の基本変形を行うと, (1,1) 成分がほかの対角成分を割り切るようにできる. これを繰り返していくと, 定理の結論の形に変形できる. (証明終)

定義 1.13 A を多項式の範囲での基本変形により $\begin{pmatrix} d_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(t)\end{pmatrix}$ $(d_1\mid d_2\mid\ \cdots\ \mid d_n)$ に変形したとき, $(d_1,\dots,d_n)$ を A の単因子と呼ぶ.

注意 1.14 ここでは証明しないが, 行列 A の単因子は多項式の定数倍を除いて一意的である. また, 定理 1.10 は単因子についても成り立つので, $m_A(t)=d_n(t)$ である.