

幾何学I 期末テストプリント

1 略解例

問題 1.

- (1) 被覆 $h: E \rightarrow X$ に対して h に関する $f: Y \rightarrow X$ の持ち上げ (リフト) の定義を述べよ.
- (2) 二つの被覆 $h: E \rightarrow X$ と $h': E' \rightarrow X$ が同値であることの定義を述べよ.

(略解例) 定義なので省略. ノートの該当箇所を見よ.

問題 2. 次の位相空間 $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7$ の基本群を求めよ. 弧状連結な位相空間の場合, 基本群を記述する場合に基点を明示しなくてよい.

- (1) $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$.
- (2) Y_2 は $\{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ を z 軸の周りに $\mathbf{R}^3$ (xyz 空間) 内で一回転させてできる図形.
- (3) $Y_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (4) $Y_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1\}$.
- (5) $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ とし, $A_0 = (0, 0), A_1 = (1, 0), A_2 = (1, 1), A_3 = (0, 1)$ とする. Y_5 は Q の一部を

$$A_0A_1 \rightarrow A_1A_2, \quad A_0A_1 \rightarrow A_2A_3, \quad A_0A_1 \rightarrow A_0A_3$$

のように同一視して出来るもの.

ただし, 「線分 AB と CD を $AB \rightarrow CD$ のように同一視する」とは, 「 AB を $t:1-t$ に内分する点を CD を $t:1-t$ に内分する点にうつすような連続写像により AB と CD を貼り合わせる」ことを意味する.

- (6) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\} \cup \{(x, 0) \mid -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, y) \mid y = x+1, -1 \leq x \leq 0\}$ とし, $B_0 = (0, 0), B_1 = (1, 0), B_2 = (0, 1), B_3 = (-1, 0)$ とする. Y_6 は R の一部を

$$B_0B_1 \rightarrow B_1B_2, \quad B_0B_1 \rightarrow B_2B_0, \quad B_0B_1 \rightarrow B_3B_0$$

のように同一視して出来るもの. ただし「同一視する」の意味については (5) を参照せよ.

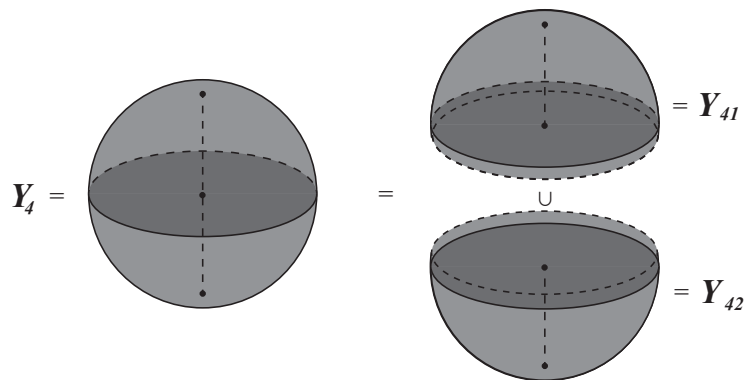
- (7) $Y_7 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(略解例)(1) Y_1 は S^1 二つの一点和で, $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$ より, $\pi_1(Y_1) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

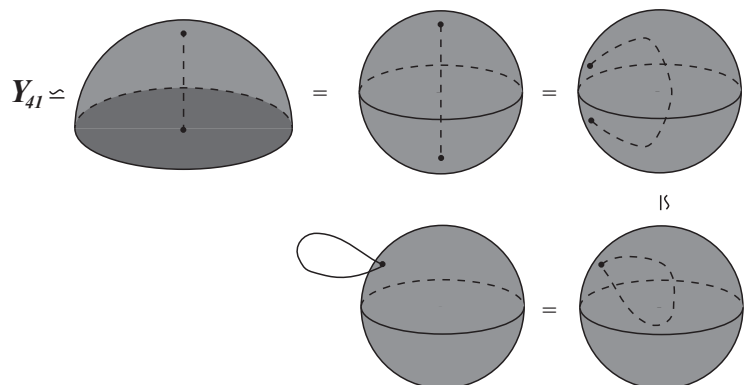
(2) Y_2 はトーラスである. ゆえに $\pi_1(Y_2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. 何度もやったので基本群の求め方は省略.

(3) Y_3 は S^1 にホモトピー同値なので $\pi_1(Y_3) = \mathbf{Z}$.

(4)

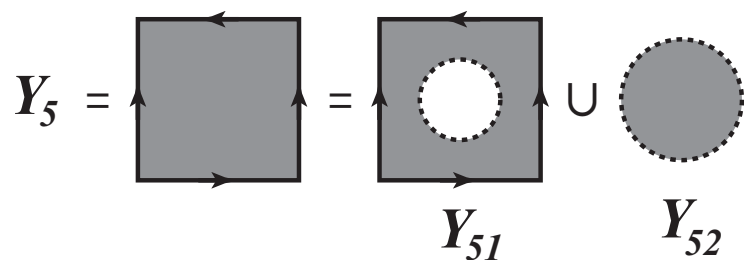


となる. 図のように Y_{41}, Y_{42} をおく. ($Y_{41} \cap Y_{42}$ は開集合である必要があるので, 真ん中で分けるのではなく, Y_{41}, Y_{42} は少し重なっていることに注意.) $Y_{41} \cap Y_{42}$ の基本群は自明な群なので, ファンカンペンの定理より, $\pi_1(Y_4) = \pi_1(Y_{41}) * \pi_1(Y_{42})$ となる. Y_{41} と Y_{42} は同相なので $\pi_1(Y_{41})$ を求めればよい.

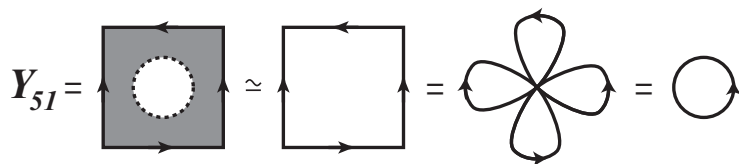


より, Y_{41} は S^1 と S^2 の一点和である. $\pi_1(S^2)$ は自明な群なので, $\pi_1(Y_{41}) = \mathbf{Z}$ となる. ゆえに $\pi_1(Y_4) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

(5)



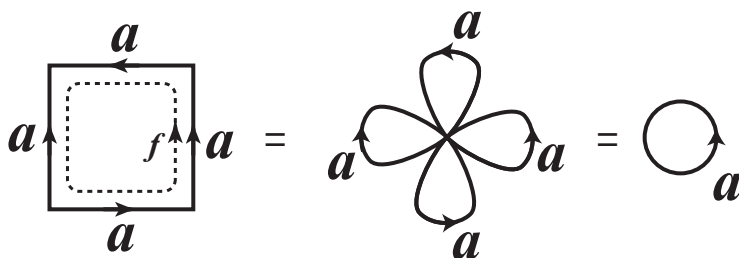
図のように Y_{51}, Y_{52} をおく. $\pi_1(Y_{51})$ を求める.



より, $\pi_1(Y_{51}) = \mathbf{Z}$ である. この生成元を a とかく. つまり, $\pi_1(Y_{51}) = \langle a \mid \rangle$. また, $\pi_1(Y_{52}) = \{e\} = \langle \mid \rangle$ となる, ただし e は単位元をあらわす. さらに, $Y_{51} \cap Y_{52}$ は S^1 にホモトピー同値であるので $\pi_1(Y_{51} \cap Y_{52}) = \mathbf{Z}$ である. この生成元を f とおく. つまり, $\pi_1(Y_{51} \cap Y_{52}) = \langle f \mid \rangle$ であり, これは上図の Y_{51} の点線部分である. ファンカンペンの定理から,

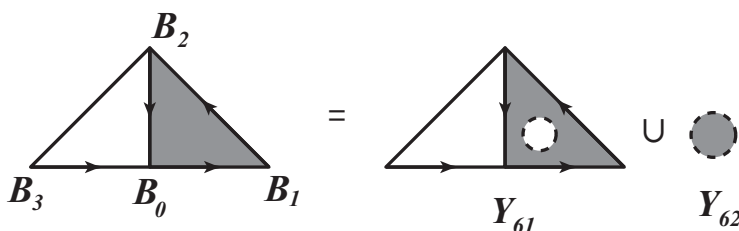
$$\pi_1(Y_5) = \langle a \mid f \text{ を } \pi_1(Y_{51}) \text{ の元と思ったもの} = e \rangle$$

となる. よって Y_{51} の点線部分が $\pi_1(Y_{51})$ でどのような元かをみる.

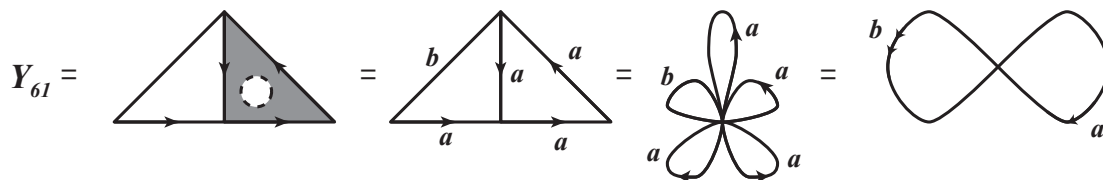


より, a を $\pi_1(Y_{51})$ の元と思ったものは $a^3 a^{-1} = a^2$ となる. ゆえに $\pi_1(Y_5) = \langle a \mid a^2 = e \rangle = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ となる.

(6)

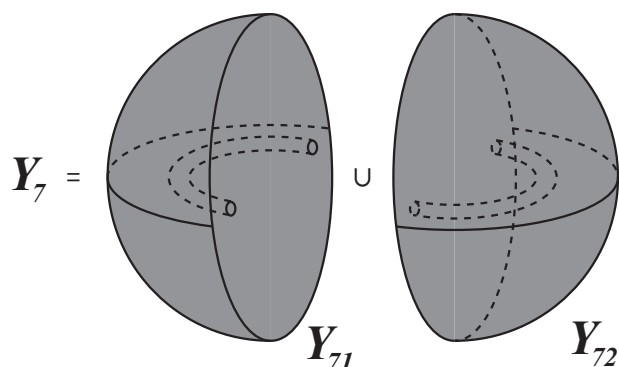


図のように Y_{61}, Y_{62} をおく. $\pi_1(Y_{61})$ を求める.

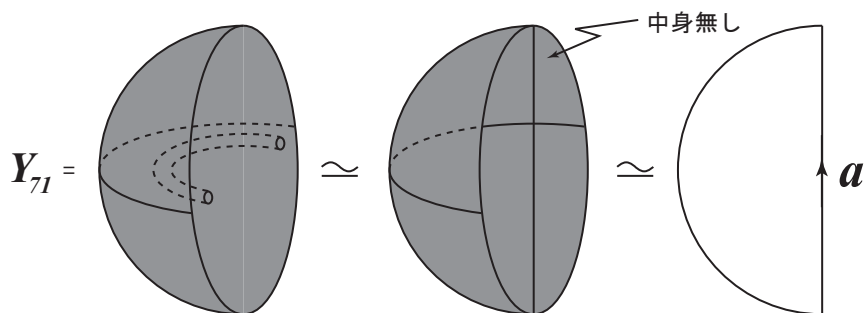


により, $\pi_1(Y_{61}) = \langle a, b \mid \rangle$ がわかる. 以降は (5) と同様にファンカンペンの定理を使うと $\pi_1(Y_6) = \langle a, b \mid a^3 = e \rangle$ がわかる.

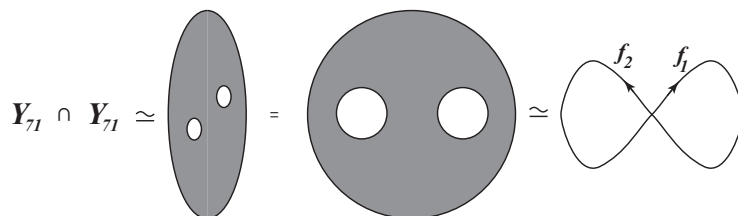
(7)



図のように Y_{71}, Y_{72} をおく. まず $\pi_1(Y_{71})$ を求める. ($Y_{71} \cap Y_{72}$ は開集合である必要がある
ので, Y_{71}, Y_{72} は少し重なっていることに注意.)



より, $\pi_1(Y_{71}) = \langle a \rangle$ となる. 同様に $\pi_1(Y_{72}) = \langle b \rangle$ となる. ここで,



から, $Y_{71} \cap Y_{72}$ は 8 の字にホモトピー同値なので, $\pi_1(Y_{71} \cap Y_{72}) = \langle f_1, f_2 \rangle$ となる. ゆえ
にファンカンペンの定理から

$$\pi_1(Y_7) = \left\langle a, b \left| \begin{array}{l} f_1 \text{ を } \pi_1(Y_{71}) \text{ の元と思ったもの} = f_1 \text{ を } \pi_1(Y_{72}) \text{ の元と思ったもの,} \\ f_2 \text{ を } \pi_1(Y_{71}) \text{ の元と思ったもの} = f_2 \text{ を } \pi_1(Y_{72}) \text{ の元と思ったもの} \end{array} \right. \right\rangle$$

f_1 と f_2 は, $\pi_1(Y_{71})$ の元と思うと a となり, $\pi_1(Y_{72})$ の元と思うと b となるので,

$$\pi_1(Y_7) = \langle a, b | a = b \rangle = \langle a \rangle = \mathbf{Z}$$

となる.

解説: (1), (2), (3) は演習でたくさんやったしサービス問題だし, 問題ないであろう. (4)
も略解例のように共通部分が可縮であるように分ければさほど難しくない. (5) も演習でた
くさんやったので大丈夫だったと思う. (6) は (5) とさほど変わらない. 略解例の Y_{61} がど

のようになるのかをしっかりと解りたい. 各頂点がすべて同じ点であることがわかれば問題ない. (7) はちょっとやったことのないタイプの問題にしてみた. 図で上下に分けると共通部分がアニュラスと円盤の和集合になり, 弧状連結にならないのでファンカンペンの定理が使えない. 上手に分割を考える必要がある.

ファンカンペンの定理は分ける部分集合が開集合でないといけけないので, 例えば (4) のような問題ではちょうど赤道の部分で二つに分けてしまいたくなるが, 本略解例のように Y_{41}, Y_{42} が開集合となるように分ける必要がある. ただし, 略解例 (4) のように, Y_{41}, Y_{42} はちょうど赤道の部分で二つに分けたものにホモトピー同値となるので, 開集合に分ける必要があることは理解した上で, 慣れてきたらちょうど赤道の部分で二つに分けて考えても問題ない.

問題 3. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の普遍被覆 $h : \mathbf{R} \rightarrow S^1$, $h(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ に対して h の被覆変換群を求めよ.

(略解例) 求める被覆変換群を T とおく. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ に対して $f \in T$ の定義は $h \circ f = h$ で, この条件は

$$\cos(2\pi f(t)) = \cos(2\pi t), \quad \sin(2\pi f(t)) = \sin(2\pi t)$$

となる. つまり $f(t) - t \in \mathbf{Z}$ となる. ゆえに T は

$$T = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f(t) - t \in \mathbf{Z}\}$$

という集合である. T から $\mathbf{Z}$ への写像 $\phi : T \rightarrow \mathbf{Z}$ を $f \in T$ に対して $\phi(f) = f(0) \in \mathbf{Z}$ とする. この ϕ が群の同型写像であることを示す.

ϕ の単射性: $f, g \in T$ は $\phi(f) = \phi(g)$ をみたとす, つまり $f(0) = g(0)$ とする. $f(t) - t \in \mathbf{Z}$ であり, $f(t) - t$ は連続写像なので $f(t) - t$ は一定である. つまり, 任意の t に対して $f(t) - t = i, i \in \mathbf{Z}$ である. 同様に g に対しても任意の t に対して $g(t) - t = j, j \in \mathbf{Z}$ である. $f(0) = g(0)$ より $i = j$ であり, 任意の t に対して $f(t) = g(t)$ が成り立つ.

ϕ の全射性: 任意の $i \in \mathbf{Z}$ に対して $f(t) = t + i$ とすると $f \in T$ で, $\phi(f) = i$ をみたとす.

ϕ の準同型性: 単射性のところでみた記号 $f(t) - t = i, i \in \mathbf{Z}$ と $g(t) - t = j, j \in \mathbf{Z}$ は, $i = \phi(f), j = \phi(g)$ である. つまり $f(t) - t = f(0) = \phi(f)$ となる. ゆえに $f, g \in T$ に対して

$$\phi(g \circ f) = g(f(0)) = g(i)$$

となる. ここで, $g(t) - t = j$ の t に i を代入して $g(i) - i = j$ なので,

$$g(i) = i + j = \phi(f) + \phi(g)$$

となり, $\phi(g \circ f) = \phi(f) + \phi(g)$ がいえ, 準同型性がわかる.

ゆえに ϕ は群の同型写像なので, 求める被覆変換群は $\mathbf{Z}$ である.

解説: どんな群かを求める必要があるの, 答えとなる群との同型写像を作る必要がある. 演習で一度やったので全く手がかからないということはなかったと思う.