2009 年教員免許更新講習予備ノート

平成 21 年 6 月 26 日佐治健太郎

本ノートは 2009 年教員免許更新講習の内容をメモ程度に書いたものである.

1　方程式の判別式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

の判別式は次である.

$$D = b^2 - 4ac \tag{2}$$

さて, 3つの数 a, b, c が与えられると二次方程式がひとつ定まる. よってこれらを変数と思い, 方程式はこれら3つのパラメーターによって表されていると考えよう. すなわち, 3次元の abc-空間の一点を一つの方程式と思うことにしよう.

この空間の中で, 方程式は $D = 0$ という集合をまたぐと解の個数が変化する. この $D = 0$ という集合を abc 空間内に図示すると図 1 のようになる.

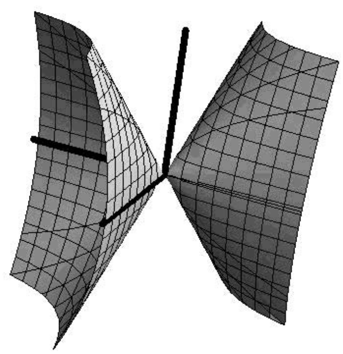

図 1: abc 空間内での $b^2 - 4ac = 0$ のグラフ

しかしこれではこの $D = 0$ という集合の幾何学的意味が分かりにくい. 幾何学的意味が分かりにくい原因の一つにパラメーターが3つと多すぎて, 見にくいことが考えられる. したがって次のようなことを考えてみよう:

方程式は定数倍しても同じである. すなわち, $k \neq 0$ として,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

と

$$kax^2 + kbx + kc = 0$$

は全く同じ方程式である．方程式 (1) は二次方程式なので $a \neq 0$ である．よって a で割って,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

次に x の項を消すことを考えよう．

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

すると[1]

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

を得る．ここで

$$X = x + \frac{b}{2a}, \quad A = -\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \tag{3}$$

とおくと (この置き換えの正当性は後ほど考えよう.)

$$X^2 + A = 0 \tag{4}$$

となる．この形は変数を適当に (適切に) 置き換えることによって元の方程式が得られるので, この形を**二次方程式の普遍形**と呼んで良いであろう．すなわち, 全ての二次方程式はこの形をしている．二次方程式全体は 3 次元だと思っていたが, 変数の取り替えによってこのような簡単な形に還元できた．ではこの方程式の (実数) 解の個数を調べよう．

これは簡単で, $A < 00$ のとき 2 個, $A = 0$ のとき 1 個, $A > 00$ のとき 0 個となる．よって,「二次方程式の全体は数直線のように一次元的に並んでいて, 数直線上の 0 を境にして解の個数が入れ替わる」と, 理解できる．さらに, (4) を A を横軸, X を縦軸にとってグラフを書いてみよう (図 2).

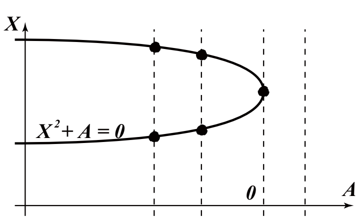

図 2: $X^2 + A = 0$ のグラフと解の個数の変化の様子

そうすると, A の値の変化によって, 解の個数 (X の個数) が 0 個, 1 個, 2 個と変化する様子がよくわかる．また, この A は (3) を見れば明らかなように判別式 $D = b^2 - 4ac$ と一致する[2].

[1] 高校の先生の前でこの変形をするのは少々恥ずかしい.

[2] 正負と定数倍は違うものの, 話に影響はない.

例題 1.1. 二次方程式 $2x^2+3x+4=0$ を普遍型にし, その解の個数がもとの方程式と同じであることを確認せよ.

演習 1.2. 二次方程式 $x^2+6x+9=0$ と $2x^2+5x-3=0$ を普遍型にし, その解の個数がもとの方程式と同じであることを確認せよ.

(授業で提示する予定) 船の転覆モデルはこの状況と同じモデルを与えている.

2 変数変換

本節では前にやった変数変換の正当性について議論しよう.

関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ のふるまいを調べるには微分して増減表を書く. よって, 関数の振る舞いとは微分の振る舞いである. 変数を取り替えたとき, 関数の微分の振る舞い方が同様であればその変数変換は関数の性質を変えないということが出来るだろう. そして, 関数の微分の振る舞い方とは, それが正負零どれになるかである. よって, 関数の微分の符号が一致するような変数変換を**適合した変数変換**と呼ぶ.

関数 $f(x)$ に対して $x=\varphi(X)$ という変数変換を考え, 合成関数 $\tilde{f}=f(\varphi(X))$ を考える:

$$\boldsymbol{R}\xrightarrow{\varphi}\boldsymbol{R}\xrightarrow{f}\boldsymbol{R}.$$

合成関数の微分法より $d\tilde{f}/dX=df/dx\,d\varphi/dX$ なので常に $d\varphi/dX>0$ であればこの変数変換は f の振る舞いを変えない. 逆関数の微分法よりこのことは逆関数 φ^{-1} の微分が $d\varphi^{-1}/dx>0$ としても同値である. よって, 適合した変数変換とは微分が常に正となるような変数変換のことである.

ここで (3) の変数変換

$$X=x+\frac{b}{2a}$$

は $dX/dx=1>0$ なので適合した変数変換であり, (3) が正当な変数変換であることが保証された.

変数が 2 個以上の場合にも同様に変数変換の正当性は議論できて, 局所的に, 関数 $f(x,y)$ の性質を変えない変数変換 $x=\varphi(X,Y)$, $y=\psi(X,Y)$ は,

$$\det J=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{pmatrix}\neq 0$$

を満たすようなものである. これは逆関数定理が成り立つ状況を意味している. このことについてここではこれ以上の説明は避ける. 変数が三つ以上の場合も同様.

3 三次方程式

ではいよいよ三次方程式を考えよう:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{5}$$

以下は一節と同様の計算である:

$$
\begin{aligned}
(5) \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 + 3\frac{b}{3a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - 3\frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{3^3a^3} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)x - \frac{b^3}{3^3a^3} + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) - \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)\frac{b}{3a} - \frac{b^3}{3^3a^3} + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

ここで

$$
X = x + \frac{b}{3a}, \qquad A = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \qquad B = \frac{8b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \tag{6}
$$

と置き換えると方程式は

$$
X^3 + AX + B = 0 \tag{7}
$$

という形になる. ここで, この式のグラフを xyz 空間に, X を z 軸方向, A, B を xy 平面と思って描いてみよう. $B = -X^3 - AX$ と変形し, A を定数だと思って $y = f(X)$ のグラフを描いてつなげればよい (図 3).

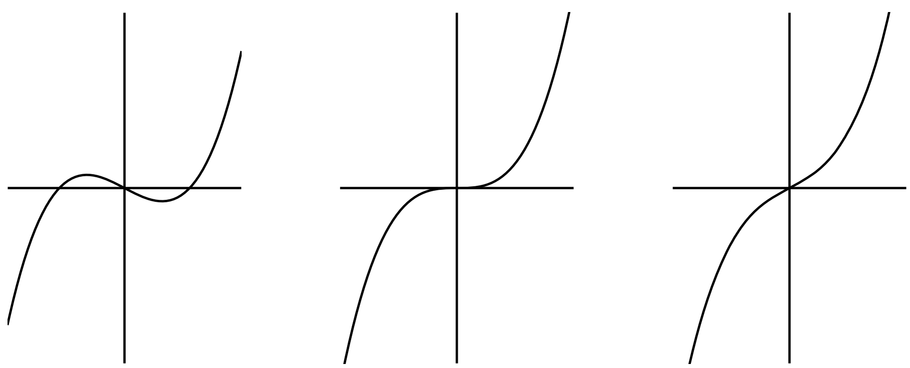

図 3: $y = X^3 - AX$ のグラフ. 左から $A < 0$, $A = 0$, $A > 0$.

これらをつなげると図 4 のようになる. ここで xy 平面上で, 上方にある X の個数が変化する部分が見えるが, その部分の式を求めてみよう. これはちょうど極値を与えるところであるので, $X = \pm\sqrt{-A/3}$ である. よって, A, B の関係式は

$$
B = \mp\frac{2A}{3}\sqrt{-\frac{A}{3}}
$$

となる. この集合は $(A, B) = (-3t^2, 2t^3)$ とすればパラメーター表示できる. このパラメーター表示をつかってこの集合の形を調べると図 5 のようになり, 図 6 を得ることに

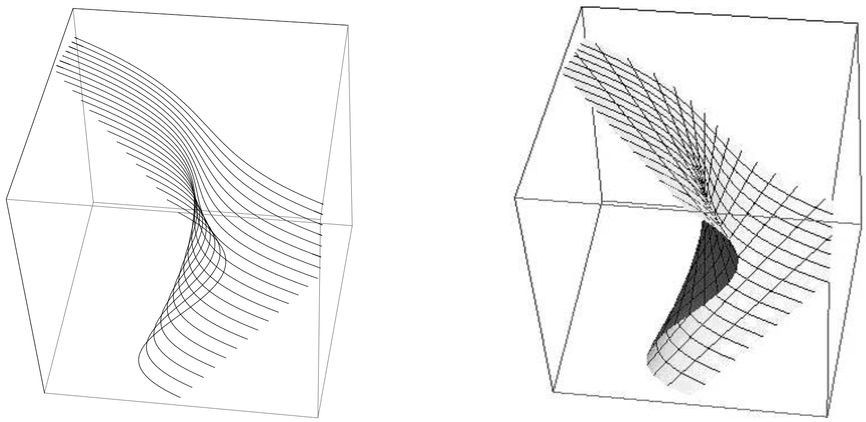

図 4: 左：曲線達 $(A, -X^3 - AX, X)$, を $A = -1$ から $A = 1$ まで 0.1 刻みで ABX 空間で描いたもの. 右：それを曲面 $(X, A) \mapsto (A, -X^3 - AX, X)$ として描いたもの.

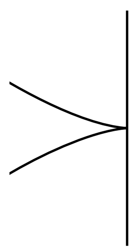

図 5: $(-3t^2, -2t^3)$ の図示

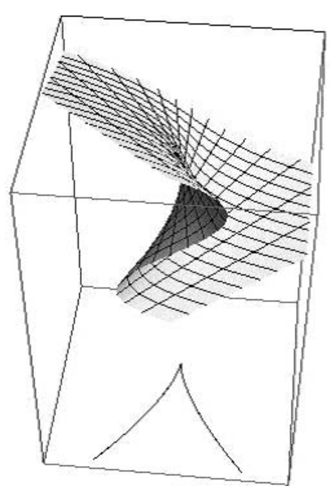

図 6: $(-3t^2, -2t^3)$ の上方にある曲面 $(X, -X^3 - AX, A)$

なる．これはくさび形の内側では解が３つ, (頂点以外の) くさび形の上では解が２つ (重複解１個と解１つ), くさび形の頂点では (重複解) 一つ, くさび形の外側では解が１つということを表している．今考えている３次方程式は全ての３次方程式を作るものだったので, これは３次方程式の解の個数の変化具合を示している．この図から, ３次方程式は平面上に並んでいるが, 解の個数の変化具合は単純でないといえる．

この (A, B) 平面上の図を**相図**という．相図のなかに三次関数のグラフが単調増加かどうかが変わるところ (容易に $A = 0$ だとわかる) も書き加えてみる．そうすると, 図のような, 三次関数のグラフの変化のようすが書ける．このような図を**分岐図式**という．これを見ると, 三次関数がどのような振る舞いをしているのかよく分かる．

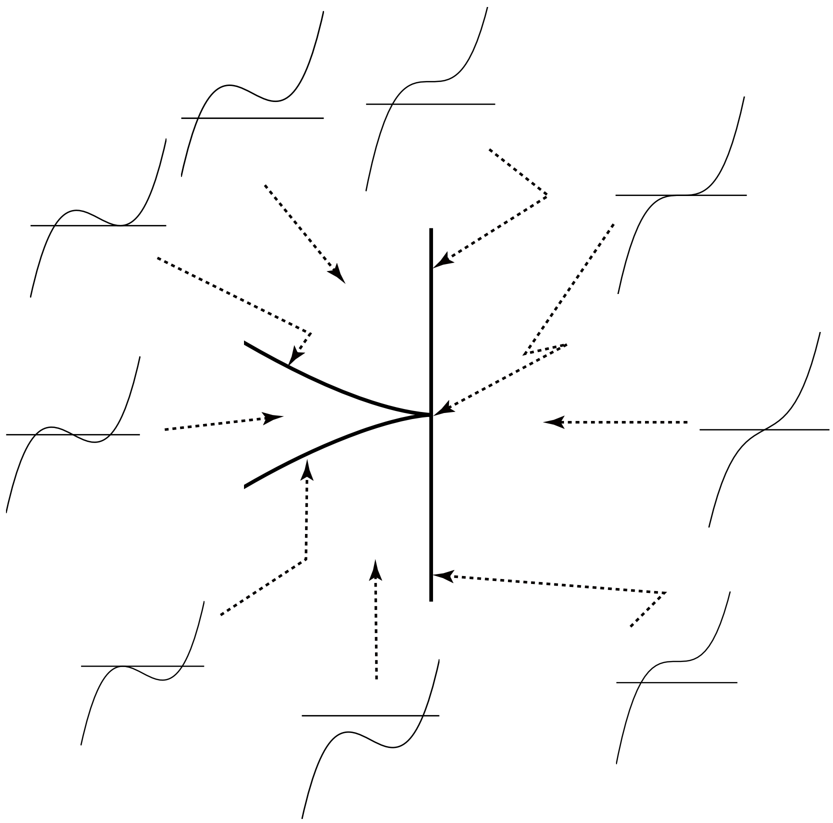

図 7: 分岐図式

例題 3.1. ３次方程式

$$x^3 + \cos\theta x + \sin\theta = 0$$

の解の変化の様子を θ を変化させて論じよ．

演習 3.2. 次の３次方程式の解の変化の様子を t を変化させて論じよ．

$$(1) x^3 + 3tx + t = 0, \qquad (2) x^3 + 3tx^2 - 2t^3 + t = 0.$$

3.1　相転移

この 3 次方程式の判別式と同じ構造をしているものとして, 水の相転移が挙げられる. なぜ同じなのかを見ていこう. 気体の状態方程式

$$PV = nRT,$$

ただし, P は圧力, V は体積, n はモル数, R は定数, T は温度, はよく知られているが, 流体の方程式は以下のようになるそうだ. n と R は両方定数なので一緒にして R としてしまう.

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V + \beta) = RT. \tag{8}$$

ここで, 密度を Z とすると $Z = 1/V$ である. (8) を P, T, Z の式にしてみよう. 分母を払うと

$$\alpha\beta Z + \alpha Z^2 + (\beta P - RT)Z + P = 0 \tag{9}$$

となる. これは PTZ 空間内で流体は方程式 (9) を満たしながら動くことを示している. 方程式 (9) は Z について三次式なので先ほどと同様に整理すると

$$\begin{aligned}\left(Z + \frac{1}{3\beta}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3\beta^2} + \frac{1}{\alpha\beta}(\beta P - RT)\right)\left(Z + \frac{1}{3\beta}\right)& \\ -\frac{1}{3\beta}\left(-\frac{1}{3\beta^2} + \frac{1}{\alpha\beta}(\beta P - RT)\right) - \frac{1}{27\beta^3} + \frac{P}{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}$$

となる. 変数変換

$$\begin{cases} \bar{Z} = Z + \dfrac{1}{3\beta} \\ A = -\dfrac{1}{3\beta^2} + \dfrac{1}{\alpha\beta}(\beta P - RT) \\ B = -\dfrac{1}{3\beta}\left(-\dfrac{1}{3\beta^2} + \dfrac{1}{\alpha\beta}(\beta P - RT)\right) - \dfrac{1}{27\beta^3} + \dfrac{P}{\alpha\beta} \end{cases}$$

を行うと,

$$\bar{Z}^3 + A\bar{Z} + B = 0$$

となる. 変数変換の正当性はすぐに確かめられる. また, この変数変換によって Z 軸方向は $\bar{Z}$ 軸方向と一致していることを注意しておく. 関数の形から明らかなようにグラフは三次方程式の時と全く同じである. ただ, (A, B) の動く範囲に注意を払う必要がある.

4　4次方程式

本節では４次方程式の解の個数の変化具合を調べてみよう．４次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

を考える．同様の計算で, 普遍型にすると

$$X^4 + AX^2 + BX + C = 0$$

を得る[3]．だいぶ次元が高くなってきたので以前の図のようなものは４次元となってしまって描くことが出来ない．しかし, 相図ならまだ描ける．この方程式の相図と判別集合を図示してみよう．３次方程式のときの考察から, 判別集合は

$$X^4 + AX^2 + BX + C = 0, \qquad 4X^3 + 2AX + B = 0$$

が共通解をもつ (A, B, C) であるとわかる．これを解くと, (u, v) をパラメーターとして,

$$(A, B, C) = (u, -4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$$

となる．この図は, u を固定して平面曲線 $v \mapsto (-4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$ をつなげれば描ける (図 8)．よって, ４次方程式の解の移り変わる場所が図 9 のように図示できる．

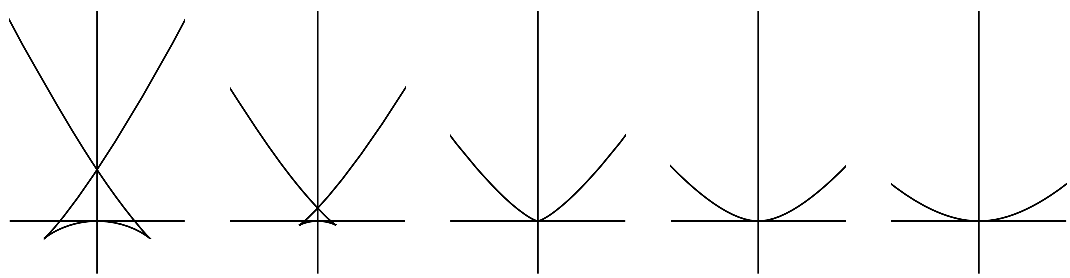

図 8: 曲線族 $v \mapsto (-4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$．左から $u = -1.4,\ -0.7,\ 0,\ 0.7,\ 1.4$.

[3] 3 次の項がないこの形が普遍型というわけではなく, 全ての４次方程式を得るには任意定数が 3 つで十分であり, 任意定数 3 つで全ての４次方程式を得ることが出来る形はすべて普遍型と呼んで差し支えない．よって, ここで得た形は普遍型の一つと言えよう．

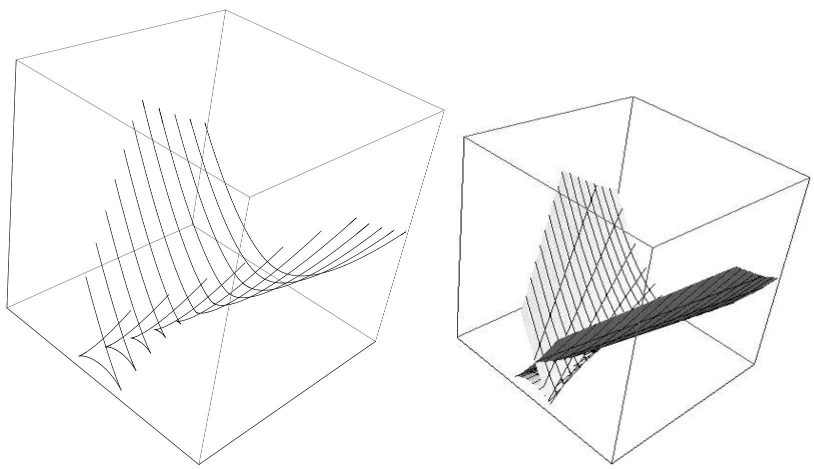

図 9: 曲線族 $v \mapsto (u, -4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$. を描いたものと曲面として $(u, -4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$ を描いたもの.