

幾何学 II 授業ノート

平成 24 年 3 月 20 日 佐治健太郎

本ノートは 2011 年度幾何 II の授業内容のメモである。

1 群とその作用

1.1 群とその作用

群とはだいたい集合 A の変換の性質を取り出したものである。この意味で、群がある集合の変換群であるという状況を考えると、「群のひとつの元に対して集合の変換が定まる」となる。これを定式化する群の作用という概念を導入しよう。

定義 1.1. 集合 G は二項演算 \cdot を持つ (すなわち, 任意の $a, b \in G$ に対して $a \cdot b \in G$.) とする。これが次の条件をみたすとき, (G, \cdot) を群という。

- 任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- ある $e \in G$ が存在して, 任意の $a \in G$ に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$.
- 任意の $a \in G$ に対して $a^{-1} \in G$ が存在して $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

G を群, X を集合とする。 G の各元が X を“動かす”という状態を考える。さらに G は群なので群の演算と相性が良いような状態を考えよう。

定義 1.2. G を群, X を集合とする。 G が X に作用するとは, 任意の $a \in G$ と任意の $x \in X$ に対して $a(x) \in X$ が定まっていて, 単位元 e に対して $e(x) = x$ であり, 任意の $a, b \in G$ に対して $(a \cdot b)(x) = a(b(x))$ が成り立つときをいう。

G が A に作用しているとき, $G \curvearrowright A$ と書く。これは難しいので例を示そう。

例 1.3. $G = \{1, -1\}$ とし普通の掛け算で群とっておく。 $G \curvearrowright \mathbf{R}$ を G の元を掛けると思うと, 作用となる:

$$1 : x \mapsto x, \quad -1 : x \mapsto -x.$$

例 1.4. (群の左作用) 作用の定義で $X = G$ としよう。 $x \in G$ に対して $g(x) = g \cdot x$ と定める。これは作用であることが容易に解る。任意の $x, y \in G$ に対して $g = yx^{-1}$ とすると $g(x) = y$ となる。任意の点は G の元によって任意のところへ動けるのである。これは群はどこでも同じ形をしていると解釈できる。

集合 X を自分自身にうつす写像全体を $T(X)$ と書く:

$$T(X) = \{f : X \rightarrow X\}.$$

これは写像の合成を演算とする群をなす。 G を群とする。 群の作用の定義をみると分かるが、 G が X に作用することと、 準同型写像 $G \rightarrow T(X)$ があることは同値である。 また、 $T(X)$ は X に自然に作用している。

定義 1.5. G を群、 X を集合とし、 G は X に作用しているとする。 この作用が**推移的**であるとは任意の $x, y \in X$ に対して $a \in G$ が存在して $g(x) = y$ を満たすときをいう。

群の推移的な作用が存在する集合はどこでも同じ形をしているといえる。

1.2 群の作用と幾何学

1872年クラインはエルランゲン大学の教授就任演説において次のように幾何学を統一的に見る方法を提示した。「幾何学とは集合上の変換群によって変わらない性質を研究するものである。」これはこんにち、**エルランゲン目録**といわれており、現代でもこの考え方のもとで幾何学の研究は行われている。もう少し詳しく述べよう。

定義 1.6. (クライン) 幾何学とは、集合 X と X に作用する群 G との組 (X, G) の事である。そして、 G の作用で変わらない性質を研究する。

例 1.7. (1) **位相幾何学**とは、位相空間 X と X の同相写像全体 $\text{Homeo}(X)$ との組 $(X, H(X))$ のことをいう。すなわち、位相空間の同相写像によって変わらない性質を論じるのが位相幾何学である。

(2) $n \times n$ 行列全体 $M_n(\mathbf{R})$ への $GL(n, \mathbf{R})$ の作用 $M_n(\mathbf{R}) \times GL(n, \mathbf{R}) \ni (M, X) \mapsto X^{-1}MX$ の組のことを**線形代数学**という。行列式やトレースはこれらの作用で変わらないのであった。

2 ユークリッド幾何学

中学校のユークリッド幾何学をこの文脈で構成してみよう。はじめに距離空間のことから始める。ユークリッド幾何学の構成とは直接関係ないが、あとで使うのでここで導入しておく。

2.1 ユークリッド平面

定義 2.1. 集合 A に対して写像 $d: A^2 \rightarrow \mathbf{R}$ が次の条件を満たすとき、 d を A の**距離**といい、 d を**距離関数**という。また、組 (A, d) を**距離空間**という。

- 任意の $a, b \in A$ に対して $d(a, b) \geq 0$ で、 $d(a, b) = 0$ の必要十分条件は $a = b$ である。

- 任意の $a, b \in A$ に対して $d(a, b) = d(b, a)$.
- 任意の $a, b, c \in A$ に対して $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (三角不等式).

\mathbf{R}^2 の 2 点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ に対して

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

は距離であり, ユークリッド距離とか普通の距離という. 以降, \mathbf{R}^2 にはユークリッド距離が入っているものとする. この距離をもった \mathbf{R}^2 を (\mathbf{R}^2, d) , \mathbb{E}^2 , \mathbf{R}^2 などと書き, ユークリッド平面と呼ぶ.

2.2 ユークリッド変換

定義 2.2. 距離空間 (A, d) とその上の全単射 $f: A \rightarrow A$ が任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ に対して

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$$

を満たすとき, 等長変換という.

補題 2.3. 等長変換全体は群をなす.

証明. すぐにわかる. □

この群を等長変換群という.

$A = \mathbf{R}^2$ のとき, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ なので, $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が等長変換であるとは任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|$$

が成り立つことである. (\mathbf{R}^2, d) の等長変換群をユークリッド群といい $\text{Euc}(2)$ と書く. $\text{Euc}(2)$ の元をユークリッド変換という.

演習 2.4 (ユークリッド変換の例). 以下はユークリッド変換である. それを示し, 行列等を使って表示せよ.

- (1) ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ をとる. \mathbf{v} 平行移動 $p_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$.
- (2) 実数 θ をとる. 原点中心, θ 回転 ρ_{θ} .
- (3) 原点を通る直線 $l: ax + by = 0$ をとる. l に関する鏡映 (対称移動) r_l .
- (4) 原点を通る直線 l と l に平行なベクトル \mathbf{v} をとる. $p_{\mathbf{v}} \circ r_l$ を 映進 という.

注意 2.5. 原点を通る直線 l と l に平行とは限らないベクトル v に関して $p_v \circ r_l$ も映進である. v を l 方向と l^\perp 方向に分解すればよい.

また, (2) と (3) と (4) は原点を通る/中心でなくても等長変換である.

Euc(2) と (\mathbf{R}^2, d) との組をユークリッド幾何学といい, この作用で変わらない性質を調べる. この作用は次の性質を満たす.

定理 2.6. 任意の $x, y \in \mathbf{R}^2$ に対してある $f \in \text{Euc}(2)$ が存在して $f(x) = y$ を満たす.

これを, 作用 $\text{Euc}(2) \curvearrowright \mathbf{R}^2$ は**推移的**であるという. これは次の補題が示されれば示される.

補題 2.7. 任意の $x \neq y \in \mathbf{R}^2$ に対して集合

$$B(x, y) = \{p \mid d(p, x) = d(p, y)\}$$

は直線である. さらに, B に関する対称移動は x を y に移す.

$B(x, y)$ を x, y の**垂直二等分線**という. まだ角度を定義していないので垂直というのは気持ち悪いが, 定義と思っしまえば構わないだろう.

補題 2.7 の証明. 前半は $B(x, y)$ の軌跡が一次式で書かれることからすぐに示される. 後半を示しておく. 平行移動によって x, y の中点を原点にとり, $x = r(\cos \theta, \sin \theta), y = -r(\cos \theta, \sin \theta)$ としても一般性を失わない. 原点を通る傾き $\tan(\theta + \pi/2)$ の直線に関する対称移動を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta + \pi) & \sin(2\theta + \pi) \\ \sin(2\theta + \pi) & -\cos(2\theta + \pi) \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(2\theta + \pi) & \sin(2\theta + \pi) \\ \sin(2\theta + \pi) & -\cos(2\theta + \pi) \end{pmatrix} x &= \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta) \\ -r(\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos(2\theta - \theta) \\ -r \sin(2\theta - \theta) \end{pmatrix} = y \end{aligned}$$

となり, 後半も示される. □

2.3 内積と角度

\mathbf{R}^2 は距離だけでなく, 内積という構造も持っている. これが Euc(2) の作用で変わらないことを見ていこう. \mathbf{R}^2 の内積を $x, y \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$x \cdot y = {}^t x y \in \mathbf{R}$$

と定義する. わざわざこのように表示する意味は後に明かす(と思う). ベクトルは縦ベクトルだと思っていて, 右辺は行列のかけ算. このとき \mathbf{x} の大きさ $|\mathbf{x}|$ を $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ とする. これは, つぎのコーシー・シュワルツの不等式を満たす.

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}). \quad (2.1)$$

証明. 任意の実数 t に対してベクトル $\mathbf{x} + t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{y}$ の長さは正である. よって

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})t^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2t + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \geq 0.$$

よって t に関するこの式の判別式は負である. ゆえ,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^4 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \leq 0$$

ゆえに

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \leq 0 \iff (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}).$$

□

この式から

$$\frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{|\mathbf{y}||\mathbf{x}|} \leq 1 \iff -1 \leq \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{y}||\mathbf{x}|} \leq 1.$$

ゆえにある $\theta \in [0, \pi]$ が存在して $\cos \theta = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})/|\mathbf{y}||\mathbf{x}|$ が成り立つ. この θ を \mathbf{x}, \mathbf{y} のなす角という.

2.4 ユークリッド群

定理 2.8. Euc(2) の元は回転, 対称移動に平行移動を合成したものである.

補題 2.9. 原点を固定する写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が等長変換であるための必要十分条件は任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$ が成り立つことである.

証明. f は原点を固定する等長変換であるとする. 等長性と原点は動かないことから任意の \mathbf{v} に対して $|f(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$ が成り立つ. $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$ なので,

$$2f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = |f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})|^2 - |f(\mathbf{u})|^2 - |f(\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

を得る. 逆に原点を固定する写像 f が $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$ を満たすとする. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ とすることにより, $|\mathbf{x}| = |f(\mathbf{x})|$ を得る. あとは同じ計算により, $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ を得る. □

補題 2.10. 原点を固定する等長変換は回転か対称変換である.

証明 1. まず f が線形写像であることを示す. $|f(\mathbf{u}+\mathbf{v})-f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})|^2, |f(a\mathbf{u})-af(\mathbf{u})|^2$ を考えると

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{u}+\mathbf{v})-f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})|^2 &= |f(\mathbf{u}+\mathbf{v})|^2 + |f(\mathbf{u})|^2 + |f(\mathbf{v})|^2 - 2f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{u}) \\ &\quad - 2f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{v}) - 2f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \\ &\quad - 2(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= 0 \\ |f(a\mathbf{u})-af(\mathbf{u})|^2 &= |f(a\mathbf{u})|^2 - 2af(a\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{u}) + a^2|f(\mathbf{u})|^2 \\ &= |a\mathbf{u}|^2 - 2a^2|\mathbf{u}|^2 + a^2|\mathbf{u}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), f(a\mathbf{u}) = af(\mathbf{u})$ がわかる. よって f は線形写像である. f の表現行列を A とすると, 等長性は $f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ と同値であったので, A は全ての \mathbf{u}, \mathbf{v} に対して

$${}^t\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = {}^tA\mathbf{u}A\mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}A A\mathbf{v}$$

を満たす. \mathbf{u}, \mathbf{v} はすべての \mathbf{R}^2 の元なので, A は ${}^tAA = E$ を満たす¹. よって A は直交行列である. 今, A は 2×2 行列であるので

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, & (2.2) \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, & (2.3) \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 & (2.4) \end{cases}$$

となる. ここで式 (2.2), (2.4) からある $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$ が存在して

$$a_{11} = \cos \theta_1, a_{21} = \sin \theta_1, a_{12} = \sin \theta_2, a_{22} = \cos \theta_2$$

が成り立つことがわかる. ここで式 (2.3) より,

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

を得る. ゆえに $\theta_2 = -\theta_1$ または $\theta_2 = \pi - \theta_1$. よって,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. 前者は $-\theta$ 回転で, 後者は x 軸の正の部分となす角が $\theta/2$ である直線に関する対称変換である. □

¹演習

証明 2. u, v を長さの等しい一次独立な 2 つのベクトルとする (長さ 1 としてよい). 任意の点 p の行き先は u, v の行き先のみで決まってしまうことを示す. まず, $f(v)$ は $f(u)$ と平行でないことを示す. u, v は一次独立なので三角不等式で等号は成立しない. よって, $f(v)$ と $f(u)$ が平行とすると等距離であることから $f(u) = f(v)$ または $f(u) = -f(v)$ であるが, 前者は単射性に反するので $f(u) = -f(v)$ が成立する. しかし, もともとの三角不等式で等号が成立したことになってしまい矛盾. 同様の議論は長さが等しくなくても可能.

任意の点 p に対し, $d(0, p) = d(0, f(p)), d(u, p) = d(f(u), f(p))$ なので $f(p)$ は 2 つの円の交点のどちらかである. $f(v)$ がこの 2 つの交点の垂直二等分線上になれば $f(p)$ の位置は確定するが, それは上記で示したことから成立する.

ここで, $u = (1, 0), v = (0, 1)$ とする. $f(u), f(v)$ は単位円上にある. また,

$$d(f(u), f(v)) = d(u, v) = \sqrt{2}.$$

$f(v)$ は $f(u)$ を $\pi/2$ 回転させたところか, $-\pi/2$ 回転させたところにある.

前者の場合, $f(u)$ と x 軸の正の部分のなす角を θ とすると, 原点の周りの θ 回転はこの変換を実現する.

後者の場合, $f(u)$ と x 軸の正の部分の二等分線を l とすると l に関する対称変換はこの変換を実現する.

u, v の行き先だけで決まってしまうので, 条件をみただけで等長変換はこれしか無いので, 主張が言える. □

定理の証明. f を等長変換とし, $f(0) = \mathbf{v}$ とする. $g = f - \mathbf{v}$ とすると g は原点を動かさない等長変換である. よって g は回転か対称変換であり, $f = g + \mathbf{v}$ はそれと平行移動の合成である. □

さて, 等長変換は 3 種類の有限回の合成であると述べたが, 実はもっと強いことが分かる.

定理 2.11. \mathbf{R}^2 の等長変換は平行移動, 回転, 対称移動, 映進の 4 種類である.

証明. 前の議論から, 三角形 (一般の位置にある三点) ABC の行き先だけで \mathbf{R}^2 の等長変換は決まってしまう. 任意の 2 点 $P, P' \in \mathbf{R}^2$ に対して P を P' に写すような対称変換がただ一つ存在するので ABC の行き先が $f(A)f(B)f(C)$ となるような対称変換を 3 つとればよい. 途中で終わった場合はそこでやめることにすれば \mathbf{R}^2 の等長変換は対称変換 3 つ以下の合成であることがわかる.

対称変換は対称軸だけで決まってしまうので, 上記の 3 つの対称変換は直線 3 つの配置のみによって決まる.

この直線 1 ~ 3 本の配置を考える.

直線 0 本と 1 本の場合は OK.

直線 2 本の配置は平行か交わるか (図 2.4). 前者は平行移動で, 後者は回転であることがすぐに分かる. 直線 3 本の配置は 4 種類あり (図 2.4) これらも行列などを使って



図 2.1: 直線 2 本の配置

計算すれば 4 つのどれかであることがすぐに分かる. □

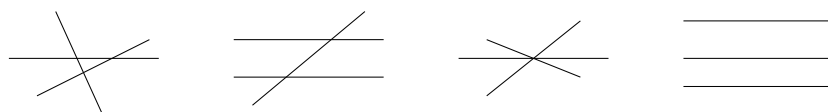
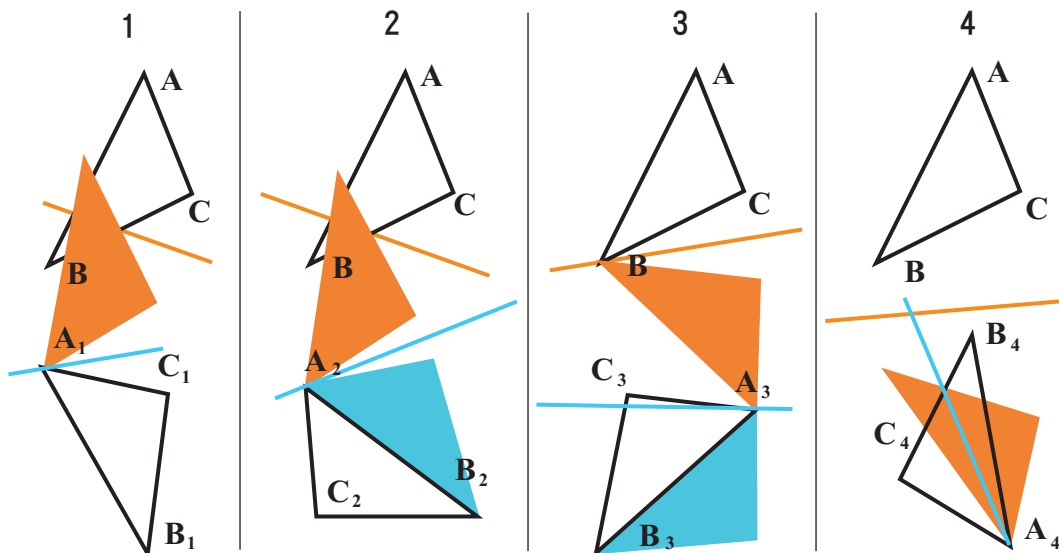


図 2.2: 直線 3 本の配置

この定理より, 合同な 2 つの三角形は対称変換 3 回で一方からもう一方に重ねることができることが分かるが, それを図で示しておこう.

図は, 一回目の対称変換を表す直線とその像をだいたい色で, 二回目の対称変換を表す直線とその像を水色で描いた.



2.5 半直積とユークリッド群

群 G が集合 A に作用していて, A も群のときを考えよう. A の自己同型写像全体を $\text{Aut } A$ と書くことにする. 準同型写像 $f: G \rightarrow \text{Aut } A$ を考える. 集合 $A \times G$ に積

$$(a_1, g_1)(a_2, g_2) = (a_1 f(g_1)(a_2), g_1 g_2)$$

を定めると $A \times G$ は群となる. これを A と G との半直積群² といい, $A \rtimes G$ と書く².

$\text{Euc}(2)$ は半直積 $\mathbf{R}^2 \rtimes O(2)$ である. これを行列で具体的に表示してみよう. \mathbf{R}^2 の原点を動かさない合同変換全体は $O(2)$ と一対一に対応する:

$$\begin{aligned} O(2) &= \{M \in GL(2, \mathbf{R}) \mid A^t A = E\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

\mathbf{R}^2 上の合同変換全体は平行移動を含む. これは次のような行列で表示される.

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & a_1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

この要素である行列のかけ算を実行してみれば合同変換を実現していることがわかる.

2.6 三角形

$A, B \in \mathbf{R}^2$ に対して線分 AB とは集合 $\{tA + (1-t)B \mid 0 \leq t \leq 1\}$ のことをいう. $A, B, C \in \mathbf{R}^2$ に対して三角形 ABC とは, $AB \cup BC \cup CA$ のことをいう. 三角形 ABC において A における内角とは \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} のなす角のことをいう. 三角形 ABC に関する文脈において, A における内角を $\angle A$ やそのまま A と表し, $d(A, B)$ を c と表すことや, A, B, C を頂点といい, AB, BC, CA を辺ということは高校までの述語と同じように使う.

定理 2.12. 三角形の内角の和は π である.

証明. 三角形 OAB に対して $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$ とする. 角度は頂点に対応する記号を使う. $\cos(O + A + B) = -1$ を示せばよい. 角の定義から

$$\cos O = \frac{a \cdot b}{|a||b|}, \quad \cos A = \frac{b \cdot (b - a)}{|b||b - a|}, \quad \cos B = \frac{-a \cdot (b - a)}{|a||b - a|}$$

となる. 角度は π までなので $\sin \geq 0$ より,

$$\sin O = \sqrt{1 - \frac{(a \cdot b)^2}{|a|^2|b|^2}} = \frac{1}{|a||b|} \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}$$

となる. 他も同様に

$$\sin A = \frac{1}{|b||b - a|} \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}, \quad \sin B = \frac{1}{|a||b - a|} \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2} \quad (2.5)$$

²集合 $A \times G$ に積を $(a_1, g_1)(a_2, g_2) = (a_1 a_2, g_1 g_2)$ と定義するほうが自然に思えるであろう. これを直積群という. 直積と半直積の違いは, A と G の積が可換でないことである.

となる. よって

$$\cos(O + A + B) = (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \cos O - (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \sin O$$

に代入して計算すると

$$\begin{aligned} \delta \left((a \cdot b) ((|b|^2 - a \cdot b)(|a|^2 - a \cdot b) - (|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2)) - (|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2) |b - a|^2 \right) \\ = \delta (|a|^4|b|^2 - 2a \cdot b|a|^2|b|^2 + |a|^2|b|^4) = -1 \end{aligned}$$

となり示される. ただし $\delta = 1/(|a|^2|b|^2|b - a|^2)$. □

注意 2.13. この定理はいわゆるユークリッドの第五公準と同値である. (13 世紀にナスィールッディーン・トゥースィーなる人物によって示されたらしい. Wikipedia の「サッケーリ」の項目を参照)

定理 2.14. 与えられた三点を通る円が存在する.

定理 2.15. 円周角の定理

証明. 与えられた三角形に平行移動, 回転と相似変換を行っても一般性を失わないので, ABC を単位円上に

$$A = (\cos \theta, \sin \theta), \quad B = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad C = (-\cos \varphi, \sin \varphi),$$

(ただし, $\varphi < \theta < \pi - \varphi$) と配置する. 角 A が θ に依存しないことを示せば良い. 角の定義から,

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-\cos \varphi - \cos \theta, \sin \varphi - \sin \theta) \cdot (\cos \varphi - \cos \theta, \sin \varphi - \sin \theta)}{|(-\cos \varphi - \cos \theta, \sin \varphi - \sin \theta)| |(\cos \varphi - \cos \theta, \sin \varphi - \sin \theta)|}$$

を計算すればよい. 分母は

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \sin \theta &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \sin \theta \\ &= 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \sin \theta = 2 \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \theta) \end{aligned}$$

となる. 分子は

$$\begin{aligned} &2\sqrt{(1 - \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi)(1 - \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi)} \\ &= 2\sqrt{1 - 2 \sin \theta \sin \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi} \\ &= 2\sqrt{1 - 2 \sin \theta \sin \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - 1 + \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \\ &= 2\sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi - 2 \sin \theta \sin \varphi} = 2|\sin \theta - \sin \varphi| = 2 \left| \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \right| \end{aligned}$$

となる. これは $\varphi < \theta < \pi - \varphi$ の範囲で正である. よって $\cos A = -\sin \varphi$ となり, θ に依らない. 中心角の半分であるという主張も最後の式を見れば成立している. □

定理 2.16. 正弦定理, 余弦定理

証明. 正弦定理は式 (2.5) を見れば

$$\frac{1}{|a||b||b-a|} \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2} = \frac{|b-a|}{\sin O} = \frac{|a|}{\sin A} = \frac{|b|}{\sin B}$$

となっているので示される. 余弦定理は $|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$ から

$$|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos O$$

となるので示される. □

注意 2.17. 正弦定理から, 二等辺三角形の底角が等しいことが示される. これから円周角の定理が従う. ここで, $o \in \mathbf{R}^2$ 中心, 半径 r の円とは $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(o, x) = r\}$ と定義する. また, 余弦定理から三平方の定理がすぐに従う.

定義 2.18. 2つの三角形は, 等長変換が存在してぴったり重ね合わせることが出来るとき, **合同**という.

定理 2.19. 三辺の長さがそれぞれ等しい2つの三角形 ABC と $A'B'C'$ は合同である.

証明. 対称移動3回以下で重ねあわせられることを示す. A を A' に移す対称移動を r_A とする. $r_A(B) = B_1, r_A(C) = C_1$ とする. B_1, C_1 が B, C と等しくない場合, B_1 を B に移すような対称移動を r_B とする. これは B, B_1 の垂直二等分線 l に関する対称移動であるが, $AB = A'B' = AB_1$ なので l は A を通る. よって $r_B(A) = A$ である. $r_B(C_1) = C_2$ とする. C_2 が C と等しくない場合, $AC = A'C' = AC_2, BC = B'C' = BC_2$ より, C, C_2 の垂直二等分線は A, B を通る. よって, AB に関する対称移動を行えば C_2 は C に移る. □

定理 2.20. 二辺とその間の角が等しい2つの三角形は合同である.

証明. もう一辺も等しいことを示せばよい. 余弦定理を使う. □

定理 2.21. 一辺とその両端の角が等しい2つの三角形は合同である.

証明. 定理 2.12 と正弦定理を組み合わせればよい. □

3 複素数と幾何学

平面上の通常距離に関する等長変換全ては直交行列と, あるベクトルによって記述された. これにより, 平面上の幾何学的構造が分かったと言え, その上に依って立っている幾何学(ユークリッド幾何学)を調べることが出来る. 他の距離を入れた空間でも等長変換全体を調べることが出来るだろうか. もし出来れば, 新たな幾何学を記述できるのではないか. 本節以降で, そのようなことを考えてみよう.

3.1 複素数と演算

定義 3.1. 記号 i に対して集合 $\{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ を \mathbf{C} と書き、**複素数**という。 \mathbf{C} の元のこと**も複素数**という。

2つの複素数 $x + iy$, $x' + iy'$ が**等しい**とは $x = x'$ かつ $y = y'$ が成り立つときとする。複素数の和, 差, 積, 商は i を $i^2 = -1$ を満たすような単なる文字だと思って普通に計算したものとする。このように定義すると \mathbf{C} が体であることがわかる。ただし, 逆元すなわち, 複素数の複素数による商がまた複素数であることは若干の計算が必要である³。複素数 $x + iy$ に対して, これを $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ と思ったときの \mathbf{R}^2 を**複素平面**とか**ガウス平面**と呼ぶ。これは拡大体と思っても良いし, \mathbf{R} 上のベクトル空間と思っても良いが⁴, 積の幾何学的意味はすぐには見えない。ここでは, この同一視の下, 演算によって点がどのように移っていくかをみよう。

その前に極形式について述べないわけにもいくまい。

補題 3.2. 任意の複素数 $z = x + iy$ に対してある正の実数 r と実数 θ が存在して

$$z = r e^{i\theta}$$

が成り立つ。

証明. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする。 $z/r = x/r + iy/r$ であるが,

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = |z|^2/r^2 = 1$$

より, $x/r = \cos \theta$, $y/r = \sin \theta$ となる実数 θ が存在する。ここで, オイラーの公式⁵

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

から, 結論が得られる⁶。 □

複素数 z を $z = r e^{i\theta}$ と書くことを z の**極表示**または**極形式**という。 r は z の原点との距離, θ は z と原点を結ぶ線分が実軸となす角である。

定義 3.3. 複素数 $z = x + iy$ について

- $x - iy$ を \bar{z} と書き, z の**共役複素数**という。
- $\sqrt{x^2 + y^2}$ を $|z|$ と書き, z の**絶対値**という。

³高校の時にやった分母を実数にするやつ。

⁴まあ, 同じだが。

⁵付録参照

⁶オイラーの公式は使わなくても三角関数の加法定理から同等のことは言えるし, 以降もオイラーの公式は必要ない。しかし, オイラーの公式は教養として知っておいた方がよいと思い, あえて導入した。

- x を $\operatorname{Re} z$ と書き, z の**実部**という.
- y を $\operatorname{Im} z$ と書き, z の**虚部**という.
- 上で出た θ を $\arg z$ と書き, z の**偏角**という⁷.
- $x = 0$ のとき z を**純虚数**という.
- 複素平面で $y = 0$ をみたく複素数全体を**実軸**, 純虚数全体を**虚軸**という.

補題 3.4. 上記の記号に対して次が成立する. $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad |zw| = |z||w|, \quad |z| = |\bar{z}|, \quad |z|^2 = z\bar{z}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

証明. 最後の3つ以外は自明. 最後の3つは少しの計算. □

さて, 準備が済んだので演算を考えよう.

複素数 $z = x + iy$, $\alpha = a + bi$ を固定する.

$$z \mapsto z + \alpha$$

は (x, y) を (a, b) だけ平行移動したものである. では,

$$z \mapsto \alpha z$$

はどういう変換であろうか. 両者を極形式で

$$z = re^{i\theta}, \quad \alpha = ke^{i\varphi}$$

と書くと,

$$\alpha z = ke^{i\varphi} re^{i\theta} = rke^{i(\theta+\varphi)}$$

となる. これは, z を k 倍して φ だけ回転したことを意味する.

よって, 次の補題を得る.

補題 3.5. 複素数 $z = re^{i\theta}$, $\alpha = ke^{i\varphi}$ に対して, αz を対応させる写像は原点中心とする k 倍の相似変換と原点中心とする φ 回転の合成である.

さて, 一番初めに示した平行移動と合わせて次のように定義することは自然だろう.

定義 3.6. 複素数 α, β に対して写像 $f(z) = \alpha z + \beta$ を**一次変換**という.

一次変換は, 相似, 回転, 平行移動の合成なので, 補題 3.5 より, 一次変換は次の性質を持つことがわかる.

補題 3.7. 一次変換は直線を直線に写し, 交わる二曲線が交点でなす角度を保存する.

一次変換は, 相似, 回転, 平行移動の合成であった. では, 対称変換はどう書けるであろうか. x 軸に関する対称変換は $(x, y) \mapsto (x, -y)$ であることを考えれば, $z \mapsto \bar{z}$ がこれを実現することが容易に分かる. よって, 写像 $f'(z) = \alpha\bar{z} + \beta$ も直線を直線に写し, 二直線のなす角度を保存する.

⁷与えられた複素数 z に対して偏角は 2π の整数倍の不定性があり, 一意的には決まらない. このような関数を**多価関数**という.

3.2 直線と円の方程式

複素数を使った直線と円の方程式をここで導入しておこう.

補題 3.8. \mathbf{C} 上の z_0 中心, 半径 r の円の方程式は

$$|z - z_0| = r.$$

証明. 明らか. □

補題 3.9. \mathbf{C} 上の原点を通らない直線 L に対して $z_0 \in \mathbf{C}$ が存在して

$$L = \{z | z_0 z + \bar{z}_0 \bar{z} = 1\}.$$

また, $z_0 \in \mathbf{C}$ に対して $\{z | z_0 z + \bar{z}_0 \bar{z} = 1\}$ は直線である.

証明. 後半は $z_0 = a + bi$, $z = x + iy$ とおけば

$$z_0 z + \bar{z}_0 \bar{z} = 1 \Leftrightarrow ax - by = 1/2$$

からあきらか. 逆に L を原点を通らない直線とする. 原点から L に下ろした垂線の足を w とする. 今, $z - w$ を w で割った複素数を考えると, w と L が直交していることから, $z \in L$ と $(z - w)/w$ が純虚数であることが同値なことがわかる⁸. よって

$$0 = \frac{z - w}{w} + \overline{\left(\frac{z - w}{w}\right)} = \frac{z - w}{w} + \frac{\bar{z} - \bar{w}}{\bar{w}}.$$

ゆえ, $z\bar{w} + \bar{z}w = 2|w|^2$ をえる. $z_0 = \bar{w}/(2|w|^2)$ とおけば, $z \in L$ と

$$z_0 z + \bar{z}_0 \bar{z} = 1$$

は同値である. □

3.3 リーマン球面と立体射影

定義 3.10. 記号 ∞ を考え, $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球面という.

本節ではこれをなぜ球面と言うのかを説明する.

xyz 空間内でガウス平面を xy 平面と思う. ここに原点中心, 半径 1 の球面 S を考え, $(0, 0, 1)$ を N と書く. $z \in \mathbf{C}$ に対して直線 Nz は $S \setminus \{N\}$ とただ一点で交わる. この点を $p(z)$ とすると写像 $p: \mathbf{C} \rightarrow S \setminus \{N\}$ が定まる. $p(\infty) = N$ と定義すれば p は全

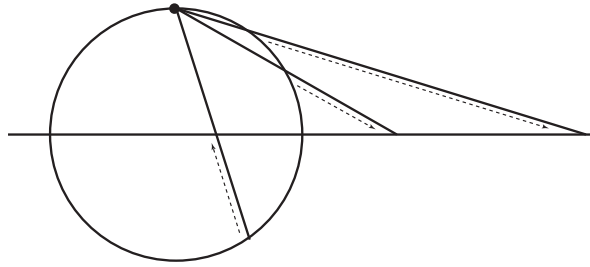


図 3.1: 立体射影の絵

単射 $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S$ となる. この全単射によって $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と S を同一視する. さらに $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を以下のように位相空間とする. 位相は S には \mathbf{R}^3 からの相対位相を入れる. $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ には p による誘導位相を入れておく⁹. 逆写像 p^{-1} を π と書き, **立体射影** と呼ぶ.

補題 3.11. $p: \mathbf{C} \rightarrow S \setminus \{N\}$ と π は次のように表示される.

$$p(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right), \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}$$

証明. $a + bi$ を (a, b) のように xy 平面と同一視する. $z = x + iy$ と $N = (0, 0, 1)$ を結ぶ直線は t をパラメーターとして

$$((x, y, 0) - (0, 0, 1))t + (0, 0, 1)$$

と表される. これの大きさが 1 であるような点が $p(z)$ なので計算により $t = 2/(x^2 + y^2 + 1)$ が分かる. よって p の表示は OK.

逆の π の表示も同様. □

⁸例えば次のように考えてもよい. w と $z - w$ が直交しているということは, w にある純虚数 ib をかけて $z - w$ になることを意味している. よって

$$w ib = z - w.$$

移項して $(z - w)/w = ib$. これは $(z - w)/w$ が純虚数であることを示している.

⁹復習: (X, \mathcal{O}) を位相空間とする. 部分集合 $Y \subset X$ に対して $\mathcal{O}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ と定義すると \mathcal{O}_Y は位相の公理を満たすことが分かり, (Y, \mathcal{O}_Y) は位相空間となる. Y の位相 \mathcal{O}_Y を**相対位相**と言う. 集合 Z に対して全射 $f: Z \rightarrow X$ があるとする. このとき $\mathcal{O}_Z = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$ と定義すると \mathcal{O}_Z は位相の公理をみたす. この位相 \mathcal{O}_Z を f による**誘導位相**という. このように書かれると難しい気がするが, 絵を自分で描いてみれば全然難しくなく, すぐに理解できるので, 絵を描いてみよ.

4 一次分数変換

4.1 一次分数変換

定義 4.1. 複素数 a, b, c, d , $ad - bc \neq 0$ に対して, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と書く. 条件は, $A \in GL(2, \mathbf{C})$ を意味する. 写像

$$\Phi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

で表される変換 $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を**一次分数変換**という. 行列 A に対して Φ_A のことを A が表す**一次分数変換**という. ただし, 分母が 0 や, $z = \infty$ のときは極限のような感じで定義する¹⁰.

補題 4.2. 一次分数変換全体は群をなす.

証明. 合成を計算してみればわかる. □

補題 4.3. $A \in GL(2, \mathbf{C})$, $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して A と kA は同じ一次分数変換を表す.

証明. 計算. □

よって, 一次分数変換全体は次のように定義するのが妥当であろう.

定義 4.4. $A, B \in GL(2, \mathbf{C})$ が同値 ($A \sim B$) であるとはある $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ が存在して $A = kB$ となるときをいう.

あきらかにこれは同値関係である. よって

定義 4.5. $PSL(2, \mathbf{C}) = GL(2, \mathbf{C}) / \sim$ と書き, **一次分数変換群**という.

商集合が分からなければ, $PSL(2, \mathbf{C}) = SL(2, \mathbf{C}) / \pm$ と思っても良い¹¹. $/\pm$ とは A と $-A$ を同一視するという意味.

ここで, Φ は ∞ のところでは場合分けで定義されており, その部分での連続性が気になる. 前節で $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の位相について議論しているのだから, 連続性に関してはきちんと議論することができるのだが, ここでは次の補題を述べるのにとどめる.

¹⁰極限のような感じとは

$$\Phi(z) = \infty \quad (z \neq \infty, cz + d = 0), \quad \Phi(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & (ac \neq 0) \\ \infty & (a \neq 0, c = 0) \\ 0 & (a = 0, c \neq 0) \end{cases}$$

¹¹こういう, ある集合に関して定数倍を同一視したものに P をつけて, 射影 \sim と呼ぶことは数学においてしばしば行われる. 射影空間 PR^n はどこかで習ったであろう. 今回の PSL もそうだし, 多様体の接空間の射影化 PTM などもそう. これらは直線などの方向がないものを記述したいときによく現れる.

補題 4.6. 一次分数変換 $\Phi : \mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は同相写像である. 特に, 連続である. 位相についてはもちろん前節で導入したもの.

証明. ∞ のところで, 点列の収束性が Φ と可換になることをチェックすればよい. 省略. □

4.2 円円対応

直線を半径が無限大の円と思い, \mathbf{C} 内の円または直線のことを**広義円**という.

定理 4.7. Φ を一次分数変換 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ とする. Q が広義円ならば, $\Phi(Q)$ も広義円である.

証明のために補題を一つ用意する.

補題 4.8. 任意の一次分数変換 Φ_A は次のように一次分数変換の合成で書ける.

$$\Phi_A = \Phi_{A_5} \circ \Phi_{A_4} \circ \Phi_{A_3} \circ \Phi_{A_2} \circ \Phi_{A_1},$$

ただし, $a \neq 0$ のとき,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -\frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = A_5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a = 0$ のとき

$$A_1 = \begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

さらに, $A \in SL(2, \mathbf{C})$ ならば, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in SL(2, \mathbf{C})$ である.

証明. 計算 □

この補題により, 定理 4.7 を幾分簡単に示せるようになる. 一次分数変換を簡単な物に分解することで, それらのみに対して定理の主張をチェックすればよくなったのである. 以下で証明を与える. すこし長いが, 方針は明瞭である.

定理 4.7 の証明. 任意の一次分数変換は $SL(2, \mathbf{C})$ の元で表されると思って良い. よって補題 4.8 より, A_1, \dots, A_5 が表す一次分数変換だけでチェックすればよい. A_1, A_2, A_4 が表す一次分数変換は相似拡大, 回転, 平行移動なので明らかに結論を満たす. よって, A_3 が表す一次分数変換のみに対して結論をチェックすればよい. ここで, $\Phi_{A_3}(z) = 1/z$ であるが, これを Ψ とおく.

以下でこの事実を次の三つの場合に分けて示す: (1) Q が原点を通る直線るとき. (2) Q が原点を通らない直線るとき. (3) Q が円るとき.

(1): まず, Q が原点を通る直線るとき, 直線上のある点 z_0 をとれば $Q = \{tz_0 \mid t \in \mathbf{R}\}$ と書ける. よって $\Psi(Q) = \{1/tz_0 \mid t \in \mathbf{R}\}$ となるが, これは原点と点 $1/z_0$ を通る直線であるので結論を満たす.

(2): Q が原点を通らない直線るとき, 補題 3.9 より, ある z_0 が存在して $Q = \{z \in \mathbf{C} \mid zz_0 + \bar{z}\bar{z}_0 = 1\}$ と書ける. よって,

$$\Psi(Q) = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \frac{1}{z}z_0 + \frac{1}{\bar{z}}\bar{z}_0 = 1 \right\}$$

となる. ここで, 式の中身を計算してみよう. 両辺に -1 をかけて左辺を移項して両辺に $z_0\bar{z}_0$ を加えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}z_0 + \frac{1}{\bar{z}}\bar{z}_0 = 1 &\Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = z_0\bar{z}_0 \\ &\Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = z_0\bar{z}_0 \\ &\Leftrightarrow |z - z_0|^2 = |z_0|^2 \end{aligned}$$

となるが, これは $\Psi(Q)$ が z_0 中心, 半径 $|z_0|$ の円であることを示す. よって結論が言える.

(3): Q が円るとき. 同様に $\Psi(Q)$ の方程式は $|1/z - z_0| = r$ である. 両辺を二乗して計算すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} - z_0\right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{z}_0\right) = r^2 &\Leftrightarrow 1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0 + |zz_0|^2 = |z|^2 r^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0 = |z|^2 (r^2 - |z_0|^2) \quad (4.1) \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}\bar{z}_0 + zz_0}{|z_0|^2 - r^2} = |z|^2 + \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} \end{aligned}$$

を得る. ここで, $r \neq |z_0|$ のとき,

$$\left| z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right|^2$$

を計算してみる.

$$\begin{aligned} \left| z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right|^2 &= \left(z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right) \left(\bar{z} - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2} \right) \\ &= z\bar{z} - \frac{z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0}{|z_0|^2 - r^2} + \frac{z_0\bar{z}_0}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

となるが, (4.1) より,

$$\begin{aligned} (4.2) &= z\bar{z} + \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} - |z|^2 + \frac{z_0\bar{z}_0}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \\ &= \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\left| z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right| = \frac{r}{|z_0|^2 - r^2}$$

を得る。これは $\Psi(Q)$ が中心 $\bar{z}_0/(|z_0|^2 - r^2)$ 、半径 $r/(|z_0|^2 - r^2)$ の円であることを示している。よって $r \neq |z_0|$ のとき、結論は言えた。

最後に $r = |z_0|$ のとき、(4.1) は $\bar{z}z_0 + zz_0 = 1$ となるが、補題 3.9 より直線である。よって結論が言える。以上より定理は示された¹² □

4.3 等角写像

一次分数変換の重要な性質に、円円対応と等角性がある。等角性とは交わる二曲線の間の角を保つという性質である。

定理 4.9. 一次分数変換は交わる二曲線が交点でなす角度を保存する。

証明. 前節同様、 $\Psi(z) = 1/z$ に対して示せばよい。 $z_0, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ をとり、これらが Ψ によって w_0, w_1, w_2 に移るとする。

z_0 から z_1 に至る曲線と z_0 から z_2 に至る曲線との、 z_0 における角度は、複素数においてかけ算が回転であることを考慮すると

$$\frac{\lim_{z_2 \rightarrow z_0} (z_2 - z_0)}{\lim_{z_1 \rightarrow z_0} (z_1 - z_0)}$$

である。さて、

$$\frac{d\Psi}{dz} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{\Psi(z_1) - \Psi(z_0)}{z_1 - z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}$$

であり、どう近づいても微分は同じなので

$$\frac{d\Psi}{dz} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{\Psi(z_2) - \Psi(z_0)}{z_2 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0},$$

が成り立つ。これから、 z_1, z_2 が z_0 に近いところで

$$\frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} = \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}$$

が従う。これを变形して

$$\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

¹²この証明は冗長である。円円対応だけを示すのなら、 $z = x + iy$ と書くと \mathbf{C} で広義円は

$$\{a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0\}$$

とあらわされる。 $1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$ なので x, y を $1/z$ の実部と虚部であらわすことができる。あとは上の式に代入すればすぐにわかる。という方針で示せる。あえてこの証明にしなかった理由はいつ直線で、いつ円になるのか、円の中心と半径はどうなっているのかが証明から分かるからである。

を得る. これは Ψ の前後で交わる二曲線の間角度が変わらないことを示している¹³. \square

ここで, 図を書いておこう (図 4.3). 直線は円か直線に移り, 角度が保存されていることを見よ.

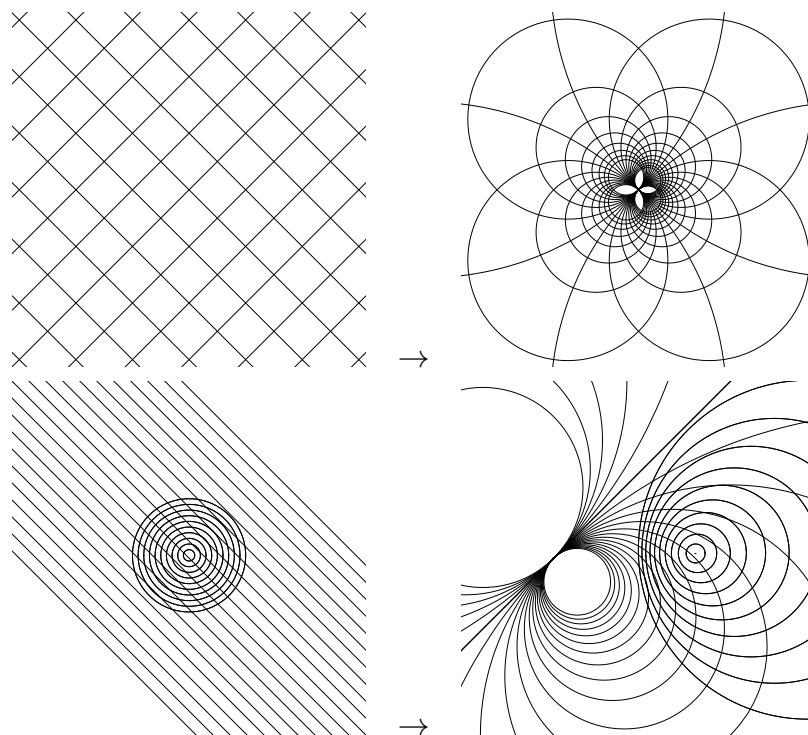


図 4.1: 左: 一次分数変換前, 右: 一次分数変換後.

例 4.10. 直線 $l = \{1 + ti | t \in \mathbf{R}\}$ を Ψ で写した像を図示してみよう.

$\Psi(l) = \{1/(1 + ti)\}$ となる. これを有理化して

$$\frac{1 - ti}{1 + t^2}$$

となるが, これを

$$\frac{1}{1 + t^2} - i \frac{t}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + t^2 + 1 - t^2}{1 + t^2} - i \frac{2t}{1 + t^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} - i \frac{2t}{1 + t^2} \right) = (*)$$

と見抜ければ, $t = \tan(\theta/2)$ と置くことにより,

$$(*) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

¹³証明を見るとわかるが, これは一次分数変換の性質は特に使っておらず, Ψ を複素変数の関数とみたとき, 微分が定まるということしか使っていない. そう, 複素変数の関数で微分が定まる (微分可能) ものは全て交わる二曲線の間角度を変えないのである.

この証明, このような証明法でなく, Ψ の形が具体的にわかっているのだからもっと直接示せないか? 良い方法があったら教えて欲しい.

なので、半径 $1/2$, 中心 $1/2$ の円であるとわかる. しかし、常人には難しい. そこで、補題 3.9 を使う. 定理 4.7 の証明から、 $\Psi(l)$ は、補題 3.9 の z_0 に対して、 z_0 中心、半径 $|z_0|$ の円であった. よって、 z_0 が分かればよい. z_0 は原点から l に下ろした垂線の足を w とおくと $z_0 = \bar{w}/(2|w|^2)$ なのでいま $z_0 = 1/2$ である. よって、 $\Psi(l)$ は半径 $1/2$, 中心 $1/2$ の円である. 実際、

$$\left| \frac{1-ti}{1+t^2} - \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \frac{1-t^2-2ti}{2(1+t^2)} \right|^2 = \frac{(1-t^2)^2}{4(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{4(1+t^2)^2} = \frac{1}{4}$$

となり、確かに $\Psi(l)$ は半径 $1/2$, 中心 $1/2$ の円である.

演習 4.11. 直線 $l_1 = \{t+i | t \in \mathbf{R}\}$ に対して $\Psi(l_1)$ を求めよ. 直線 $l_2 = \{t+it | t \in \mathbf{R}\}$ に対して $\Psi(l_2)$ を求めよ.

4.4 複比

一次分数変換による複比の不変性を述べたいが、時間がない.

4.5 シュタイナーの円鎖

おもしろい話題だが、時間はあるか?

5 ポアンカレ平面と双曲幾何学

5.1 上半平面

定義 5.1. $H = \{z \in \mathbf{C} | \text{Im } z > 0\}$ とする.

曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ の長さの定義は接ベクトルの大きさを積分せよであった. では接ベクトルの大きさの定義自体を変更したらどうなるか?

$z = x + iy \in H$ における H の接ベクトル $\mathbf{v} = v_1 + iv_2 \in T_z H$ の長さを

$$|\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{y}$$

と定義する. これは多様体論を使っているので調子が悪い. よって次のように、多様体の概念を使わずに長さを定義してしまおう.

定義 5.2. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) : [a, b] \rightarrow H$ の双曲的長さ L_h とは

$$L_h(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{\gamma_2(t)} |\gamma'(t)| dt. \quad (5.1)$$

普通の長さの定義と、 γ_2 で割っているところが異なる。実軸に近いところでは長いということが実感できる。また、 $\gamma : I \rightarrow \mathbf{H}$ なので分母は常に正であることに注意しておく。これを使って \mathbf{H} の二点間の距離を定義してしまおう。

定義 5.3. $z, w \in \mathbf{H}$ の双曲的距離 $d_h(z, w)$ を

$$d_h(z, w) = \inf_{\gamma} \{L_h(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{H}, \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\} \quad (5.2)$$

と定義する。

この d_h は距離の公理を満たす。

補題 5.4. d_h は次を満たす。

- $d_h(z, w) \geq 0$,
- $d_h(z, w) = 0 \iff z = w$,
- $d_h(z, w) = d_h(w, z)$,
- $d_h(z_1, z_2) + d_h(z_2, z_3) \geq d_h(z_1, z_3)$.

証明. 省略 □

定義 5.5. 距離空間 (\mathbf{H}, d_h) を上半平面またはポアンカレ平面という。距離 d_h を作る時に考えた概念をポアンカレ計量という¹⁴。以降 \mathbf{H} と書いたら (\mathbf{H}, d_h) のこととする。

5.2 上半平面の等長変換

本節では行列 A に対応する一次分数変換 Φ_A について、誤解のない場合は A を省略し、 Φ と記す。

補題 5.6.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$$

に対応する一次分数変換

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

に対して $\Phi(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ である。

¹⁴双曲平面という場合もあるが、これは通常同じものを別の見方をしたときに使われる用語なので避けておくことにする。ポアンカレ計量の説明があいまいな感じである。計量とは多様体の接空間上の概念なので、はっきりとした説明をごまかした。

添え字などでよく出てくる“h”は hyperbolic (双曲線の) の頭文字である。

ここでこうも双曲線が出てくる理由はこれらの空間が双曲線(面)として実現されるからであるが、その理由は9節でわかる。

証明. z を実数とすると $\Phi(z)$ も実数なので Φ は \mathbf{H} を \mathbf{H} か下半平面に写す. ここで, $\Phi(i) = (ad - bc)/(d^2 + c^2) > 0$ より, $\Phi(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$. \square

これから, $SL(2, \mathbf{R})$ の元は \mathbf{H} の一次変換を定めるが, \pm をとっても同じ変換を定める.

定義 5.7. $SL(2, \mathbf{R})/\pm = PSL(2, \mathbf{R})$ と書く.

一次変換とポアンカレ計量との関係は以下である.

定理 5.8. $\Phi \in PSL(2, \mathbf{R})$ とする. 任意の $z, w \in \mathbf{H}$ に対して

$$d_h(\Phi(z), \Phi(w)) = d_h(z, w).$$

証明. $I = [t_0, t_1]$ を区間とし, $\gamma : I \rightarrow \mathbf{H}$ を曲線とする. γ の長さ $L_h(\gamma)$ と書くと, 示すことは $L_h(\gamma) = L_h(\Phi(\gamma))$ である.

まず記号を準備しておこう. $z \in \mathbf{C}$ を $z = x + iy$ と書き, $\gamma = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ とし, $\Phi(z) = \Phi_1(z) + i\Phi_2(z)$ とする.

さて, γ の長さは

$$L_h(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\gamma_2(t)} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt$$

であったことを思い出そう. すると, $L_h(\Phi(\gamma))$ を計算するためには,

$$\Phi_2(\gamma), \quad \left| \frac{d(\Phi(\gamma))}{dt} \right|$$

の二つが計算できればよいことが分かる. まず,

$$\Phi(\gamma) = \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d} = \frac{(a\gamma + b)(c\bar{\gamma} + d)}{(c\gamma + d)(c\bar{\gamma} + d)} = \frac{ac|\gamma|^2 + ad\gamma + bc\bar{\gamma} + bd}{|c\gamma + d|^2}$$

なので, $ad - bc = 1$ より,

$$\Phi_2(\gamma) = \frac{1}{|c\gamma + d|^2} \gamma_2$$

を得る. 次に $|d\Phi(\gamma)/dt|$ であるが,

$$\begin{pmatrix} \Phi'_1(t) \\ \Phi'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} (\gamma(t)) \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}$$

である¹⁵. 真ん中の 2×2 行列を $J\Phi$ とおく¹⁶. よって

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|^2 &= (\Phi'_1(t))^2 + (\Phi'_2(t))^2 = \begin{pmatrix} \Phi'_1(t) & \Phi'_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'_1(t) \\ \Phi'_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) \end{pmatrix} {}^t J\Phi(\gamma(t)) J\Phi(\gamma(t)) \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる¹⁷. よって, $J\Phi$ が計算できればよい. $\Phi(z) = \Phi(x + iy)$ なので

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{a(c(x + iy) + d) - (a(x + iy) + b)c}{(c(x + iy) + d)^2} = \frac{1}{(c(x + iy) + d)^2},$$

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{ai(c(x + iy) + d) - (a(x + iy) + b)ic}{(c(x + iy) + d)^2} = \frac{i}{(c(x + iy) + d)^2}$$

を得る. ここで, $ad - bc = 1$ を使った. ゆえに, $\operatorname{Re} iz = -\operatorname{Im} z$ に注意して

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{d\Phi}{dx} & \operatorname{Re} \frac{d\Phi}{dy} \\ \operatorname{Im} \frac{d\Phi}{dx} & \operatorname{Im} \frac{d\Phi}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} & -\operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} \\ \operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} & \operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} \end{pmatrix}$$

を得る. さて, ${}^t J\Phi J\Phi$ を計算しよう.

$$\begin{aligned} {}^t J\Phi J\Phi &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} & \operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} \\ -\operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} & \operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} & -\operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} \\ \operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} & \operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} \end{pmatrix} \\ &= \left(\left(\operatorname{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} \right)^2 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|cz + d|^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

いよいよ必要な全てのものが計算できた. 結局,

$$\begin{aligned} L_h(\Phi(\gamma)) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\Phi_2(\gamma)} \left| \frac{d\Phi(\gamma)}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} |c\gamma + d|^2 \frac{1}{\gamma_2} \frac{1}{|c\gamma + d|^2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\gamma_2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = L_h(\gamma) \end{aligned}$$

となり, 証明が終わる. □

¹⁵たぶん統微分積分学の積分の変数変換のところをやったはず. 合成関数の微分法とも言う.

¹⁶ $J\Phi$ はヤコビ行列. ヤコビ行列に γ を突っこんでいるのが気持ち悪い人は, ヤコビ行列は $GL(2, \mathbf{C})$ に値をとる (値域とする) 写像 $\mathbf{H} \rightarrow GL(2, \mathbf{C})$ だと思って理解すれば気持ち悪くならずすむ.

¹⁷二次形式の計算を簡単にやるテクニック.

5.3 等長変換

ゆえに, $PSL(2, \mathbf{R})$ は \mathbf{H}^2 の等長変換を定めることがわかった.

では \mathbf{H}^2 の等長変換全体¹⁸はなにか? すこし考えると, 次の写像は \mathbf{H}^2 の等長変換であり, 一次分数変換では実現できないことがわかる:

$$\tilde{\Phi}(z) = -\bar{z}.$$

ゆえに, \mathbf{H} の等長変換全体を G とすると G は $PSL(2, \mathbf{R})$ と $\tilde{\Phi}$ の有限回の合成である.

5.4 測地線

定義 5.3 の下限を実現する曲線を測地線と呼ぶ. ユークリッド幾何における線分のことである. \mathbf{H} の測地線が分かれば, 線分が分かったことになる. 本節では, \mathbf{H} の測地線を決定しよう. まずは次の補題を示す.

補題 5.9. 任意の $z, w \in \mathbf{H}$ に対して $A \in SL(2, \mathbf{R})$ が存在して $\Phi_A(z) = w$ が成り立つ¹⁹.

さらに任意の $z, w \in \mathbf{H}$ に対して $A \in SL(2, \mathbf{R})$ が存在して $\Phi_A(z) = i, \Phi_A(w) = ik$, が成り立つ.

証明. まず, A_1, A_2, A_3 を

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}).$$

とすると,

- (1) Φ_{A_1} は平行移動を与える.
- (2) Φ_{A_2} は l^2 倍の相似変換を与える.
- (3) Φ_{A_3} は i を変えない.
- (4) 任意の複素数 w に対して $\theta \in \mathbf{R}$ が存在して, $\operatorname{Re}(\Phi_{A_3}(w)) = 0$ と出来る.

¹⁸つまり, 等長変換群

¹⁹この事実を \mathbf{H} の等長変換は \mathbf{H} に推移的に作用するという. 等長変換全体は群をなすため, \mathbf{H} は群が推移的に作用する空間ということになる. これは任意の点 P と $g(P)$ の周りが同じ形をしていることを意味するので, \mathbf{H} は任意の点の周りが同じ形をしているということになる. このような, 任意の点の周りが同じ形をしている空間のことを等質空間という.

これは (4) 以外は明らかなので (4) のみ示す. $w = w_1 + iw_2$ とおいて $\operatorname{Re}(\Phi_{A_3}(w))$ の分子の実部を計算すると

$$(w_1 \cos \theta - \sin \theta)(w_1 \sin \theta + \cos \theta) + w_2^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2 - 1) \sin 2\theta + w_1 \cos 2\theta \quad (5.3)$$

となる. (5.3)=0 となるには, α を

$$\tan \alpha = \frac{2w_1}{w_1^2 + w_2^2 - 1} \quad (5.4)$$

となる角度として, $2\theta + \alpha = 0$ となるように θ を定めればよいが, (5.4) の左辺は任意の実数をとるので, (5.4) を実現するような α は存在する. よって所望の θ は存在する. $w_1^2 + w_2^2 - 1 = 0$ の場合は $2\theta = \pi/2$ とすればよい.

とすると, z に対して A_1, A_2 により $\Phi_A(z) = i$ とできる. ので前半は正しい. A_3 は i を変えずに任意の複素数を虚軸上に持って行けるので後半も正しいことがわかる. \square

補題 5.10. $P = i, Q = ik \in \mathbf{H}$ とする. このとき P, Q を結ぶ測地線は (虚軸に平行な) P, Q を結ぶ線分である.

証明. $c(t) = ti, (1 \leq t \leq k)$ とする. c の長さは

$$L_h(c) = \int_1^k \frac{1}{t} \left| \frac{dl}{dt} \right| dt = \int_1^k \frac{1}{t} dt = [\log t]_1^k = \log k$$

となる. これが測地線すなわち, 最短線であることを示せばよい.

$\gamma(t) = \gamma_1 + i\gamma_2$ を P, Q を結ぶ任意の曲線とする. とすると,

$$\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}$$

なので,

$$L_h(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{\gamma_2} \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} dt$$

が成り立つ. γ_2 が単調増加であれば, $T = \gamma_2$ と変数変換できて,

$$\int_a^b \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} dt = \int_1^r \frac{1}{T} dT$$

とできる. γ_2 が単調増加でない場合は, 単調増加になる部分だけをつなげた連続関数を $\bar{\gamma}_2$ とすると

$$\int_a^b \frac{\bar{\gamma}_2'}{\bar{\gamma}_2} dt \geq \int_1^r \frac{1}{T} dT$$

がわかる. よって,

$$L_h(\gamma) \geq \int_1^r \frac{1}{T} dT = L_h(c).$$

等号成立は, γ_1 が常に 0 で, γ_2 が単調増加, すなわち, c そのものしかない. よって, c は測地線である. \square

定理の証明から、次がわかる.

系 5.11.

$$d_h(i, ik) = \log k.$$

これで H の測地線が決定できる.

定理 5.12. H の測地線は実軸に直交する直線または円である.

証明. 補題 5.9 より, 等長変換 g が存在して, $g(P) = i, g(Q) = ik$ とできる. 補題 5.10 これらを結ぶ測地線は虚軸に平行な線分 c である. 定理 5.8 より, g は一次分数変換である. $g^{-1}(c)$ が求める測地線であるが, g^{-1} は一次分数変換なので広義円を広義円に写し, 角度を保存する. よって, $g^{-1}(c)$ は線分または円の一部で, それは実軸と直交する. 逆に, 実軸と直交し, H 上の 2 点を通る円または直線は一つしかない. よって P, Q を結ぶ測地線はこれでなければならない. \square

H の測地線は図のようなものである. これですべての直線, 線分がわかった. 三角形と

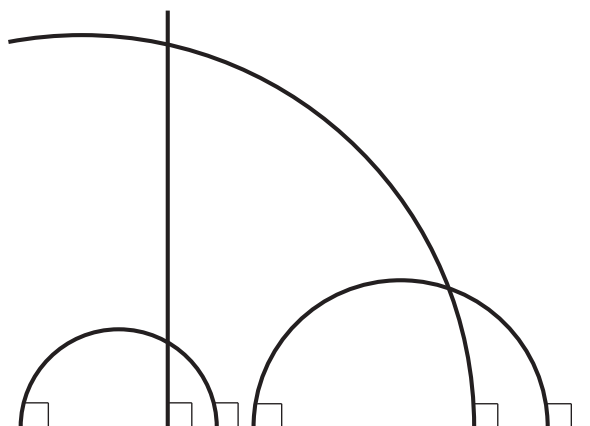


図 5.1: H の測地線.

は三つの線分で囲まれた部分なので, H 上の三角形が考えられることになった.

6 非ユークリッド幾何

今まで我々が中学校などで習ってきた幾何学は線分を主な対象にしてきた. 三角形の辺は全て線分であった. なぜ線分なのかというと, それが最短距離を与えるからである. 我々が手にした H 上で, 測地線を線分と思って中学校まででやってきた幾何学を展開するのが自然であろう.

ユークリッドは著書幾何学原論において²⁰平面上の幾何学に5つの公理を課した。最後の公理は平行線の公理と呼ばれ、長らく多くの数学者によって興味を持たれた²¹。最後の公理を述べておこう。

「直線 l と l 上にない一点 P を通るような、 l と交点を持たない直線がただ一つ存在する²²。」

いま我々が手にした D または H の上で、直線を測地線と読み替えてこの公理を考えると平行線(交わらない直線)が無限に存在することが見て取れる。これにより、我々が手にした幾何学はユークリッドの意味での幾何学とは異なるものであることが分かった。ユークリッドの5つの公理を満たさない幾何学を非ユークリッド幾何という。 H または D 上の幾何学は非ユークリッド幾何であり、特に双曲幾何と呼ばれる²³。まとめると、双曲幾何とは (H, G) である。ただし、 G は $PSL(2, \mathbf{R})$ と $\tilde{\Phi}$ の有限回の合成である。すなわち、 H の図形の性質を G の元で変化しないものは同じとみなして研究することを双曲幾何という。 G の元はユークリッド幾何における、平行移動、回転、対称移動に対応するものである。本節で H の初等幾何を調べるが、そのために必要な直線等の概念を定義しておこう。

定義 6.1. H の直線とは実軸に直交する直線か、実軸に直交する半円である。 H の線分とは H の直線の連結な一部とする。 H の三角形とは H の線分三つで囲まれた部分とする。 H の線分間の角とは、交点における接線同士のなす角とする。

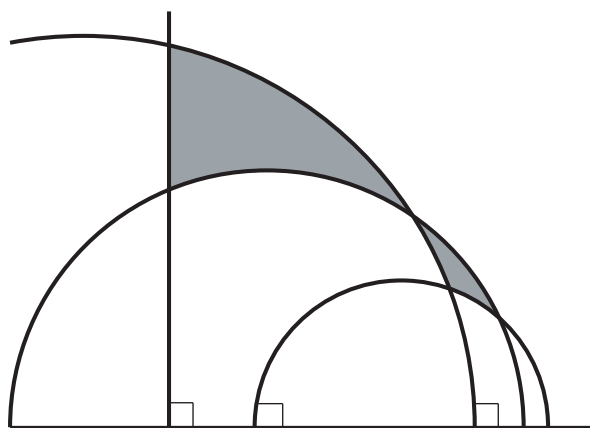


図 6.1: H の三角形.

²⁰全てがユークリッドによるものなのかは議論が分かれているらしいが

²¹幾何学 II は数学の歴史の講義でないのでこのあたりは詳しく述べない。

²²原論にあるものと表現は異なる。

²³双曲があるなら楕円幾何とか放物幾何はあるのかが気になるであろう。実際それらはあり、放物幾何はユークリッド幾何のことで、楕円幾何はまた全く別の非ユークリッド幾何を指す。ユークリッドの5番目の公理の否定を考えてみると、双曲幾何の場合だけではないことがわかる。もう一つの場合が楕円幾何と呼ばれるものである。自分で否定を考えてみよ。なんでこういう名前なのかは次節で書く。

6.1 ガウス・ボンネの定理

まずは双曲幾何における三角形の面積を求めよう. 三角形 ABC を $\triangle ABC$ と書こう. \mathbf{H} 内の集合 S の面積を

$$\int_S \frac{1}{y^2} dx dy$$

と定義する. このとき, 図 6.2 のような図形²⁴ T の面積は

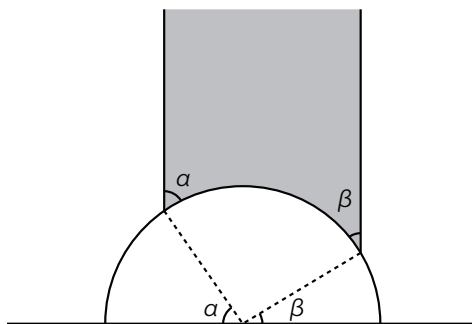


図 6.2: 図形 T .

$$\begin{aligned} \int_T \frac{1}{y^2} dx dy &= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -1 d\theta = \pi - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

となる. 簡単のために円の半径は 1 としたが半径 r としても同様である. これで次の定理がわかる.

定理 6.2 (ガウス・ボンネの定理). 内角が α, β, γ の三角形の面積は $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ である.

証明. 図 6.3 のように二つの無限三角形に分解すればよい. □

ガウス・ボンネの定理から, \mathbf{H} 内の三角形の内角の和は π 以下であることが分かるが逆はどうであろうか. すなわち, π 以下の内角を持つ三角形はいつでも存在するのだろうか. それに答えるのが次の定理である.

定理 6.3. 任意の $0 < \theta < \pi$ に対して内角の和が θ である \mathbf{H} の三角形が存在する.

証明. 角度 θ に対して α, β を $\alpha + \beta < \theta$ となるようにとり, $\gamma = \theta - \alpha - \beta$ とする. 内角が α, β, γ であるような三角形を見つければよい. 欲しい三角形の一边を虚軸にとり, 虚軸上の一点を A とする. A から角度 α をなすように \mathbf{H} の直線を伸ばす. この直線

²⁴無限三角形という.

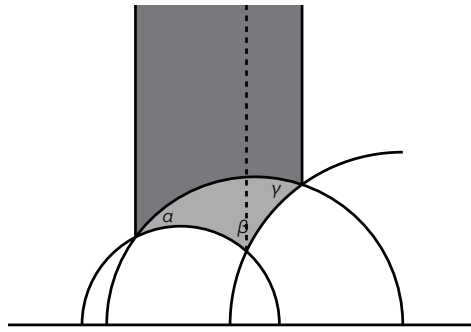


図 6.3: ガウス・ボンネの定理の証明.

と実軸の正の部分との交点を \bar{C} とする. 虚軸上の点で A の上方に B をとり, B から角度 β をなすように \mathbf{H} の直線を伸ばす. これと弧 $A\bar{C}$ との交点を C とする.

B が A に近いときは ABC は普通の三角形に近いので C における内角は $\pi - \alpha - \beta$ であり, C が \bar{C} に一致するとき C における内角は 0 となる. よって C における内角が γ に一致するような B が必ず存在する. この三角形 ABC が求めるものである. \square

6.2 三角形の合同条件

測地線が決定できたということは測地線は最短線なので, 測地線を線分だと思つと, \mathbf{H}^2 における三角形が考えられることを意味する. 本節では \mathbf{H} における三角形の合同条件を考える.

定義 6.4. $A, B, C \in \mathbf{H}$ とする. AB で, A と B を両端とする \mathbf{H} の線分を表す²⁵. また, $\triangle ABC$ に対して A における角度を A のようにあらわす.

定義 6.5. \mathbf{H} 内の二つの三角形 $ABC, A'B'C'$ が合同であるとはある等長変換 g が存在して $g(ABC) = A'B'C'$ となるときをいう.

ユークリッド幾何のときと同じようにして次が成り立つ.

定理 6.6. \mathbf{H} 内の二つの三角形 $ABC, A'B'C'$ は

$$d_h(A, B) = d_h(A', B'), \quad d_h(B, C) = d_h(B', C'), \quad d_h(C, A) = d_h(C', A')$$

が成り立つならば合同である.

これを示す前に補題を示そう.

補題 6.7. $P \in \mathbf{H}$ に対して P から等距離にある点の集合

$$\{X \in \mathbf{H} \mid d_h(P, X) = r\}$$

は(ユークリッド距離の意味での)円である. もちろん中心は P でない.

²⁵もちろんただひとつ定まる.

証明. 補題 5.9, 系 5.11, 定理 5.8 から, i から等距離 $\log r$ にある点の全体は ri を Φ_A で写した点の全体である. ただし,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\Phi_A(ri) = \frac{\cos \theta ri - \sin \theta}{\sin \theta ri + \cos \theta} = \frac{(r^2 - 1) \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} + \frac{ri}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$$

がどんな図形を描くかを見ればよい.

ここで, $\Phi_A(ri)$ と $(r^2 + 1)i/(2r)$ との差の大きさの二乗を考えよう. 差を $z = z_1 + iz_2$ とおくと

$$z_1 + iz_2 = \frac{(r^2 - 1) \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} + \left(\frac{r}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} - \frac{r^2 + 1}{2r} \right) i$$

なので, 虚部を上手に計算しよう. 通分して

$$z_2 = \frac{2r^2 - (r^2 + 1)(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}{2r(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}$$

となる. 一項目の $2r^2$ を $2r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$ と思い計算すると

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - (r^2 + 1)(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}{2r(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{\cos^2 \theta(r^2 - 1) - r^2 \sin^2 \theta(r^2 - 1)}{2r(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} = \frac{(r^2 - 1)(\cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)}{2r(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} \end{aligned}$$

となる. よって

$$z_1 + iz_2 = \frac{(r^2 - 1)}{2r(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} (2r \cos \theta \sin \theta + i(\cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta))$$

となる. よって

$$|z|^2 = \frac{(r^2 - 1)^2}{4r^2(\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2} (4r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + (\cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)^2) = \frac{(r^2 - 1)^2}{4r^2}$$

となる. これは θ に依存しないので, $\Phi_A(ri)$ は中心 $(r^2 + 1)i/(2r)$, 半径 $(r^2 - 1)/(2r)$ の円を描くことがわかった. \square

定理 6.6 の証明. $ABC, A'B'C'$ は定理の条件を満たすとす. 補題 5.9 より, 等長変換により, $A = A' = i, B = B' = ri$ とできる. あとは C と C' を重ねられればよい. $AC = A'C', BC = B'C'$ なので C と C' は両方虚軸上に中心をもつ同じ円内にある. よって $C = C'$ または C と $-C'$ は虚軸に対して対称な位置にある. 後者の場合は虚軸に関する対称変換をとればよい. \square

6.3 H 内の初等幾何

さて, 準備もとのつたので H 内の初等幾何を調べよう. まずは三角形の合同条件を調べよう. 三辺相当があるので, 正弦定理や余弦定理のような定理が出来れば他の合同条件が得られる. まずは一つの角が直角の三角形の場合を考えよう.

定理 6.8. H 内の三角形 ABC は C は直角であるとする. このとき

$$(h1) \cosh c = \frac{1}{\tan A \tan B}$$

$$(h2) \tanh a = \tanh c \cos B, \quad \tanh b = \tanh c \cos A$$

$$(h3) \sinh a = \sin A \sinh c, \quad \sinh b = \sin B \sinh c$$

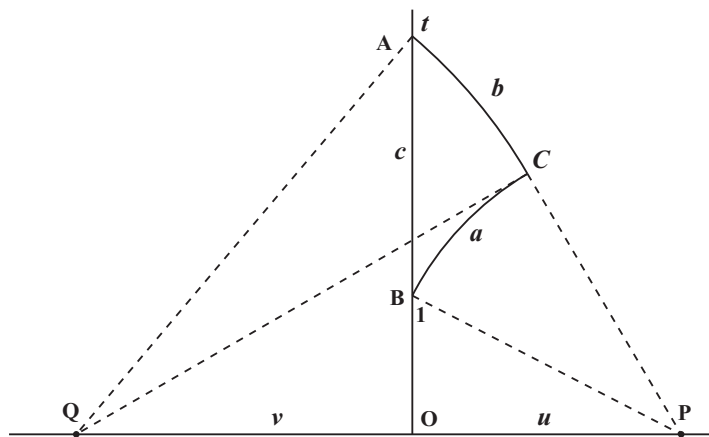
$$(h4) \cos A = \sin B \cosh a, \quad \cos B = \sin A \cosh b$$

$$(h5) \cosh c = \cosh a \cosh b$$

$$(h6) \tanh a = \sinh b \tan A, \quad \tanh b = \sinh a \tan B$$

が成立する.

証明. H 内の三角形 ABC に対して適当に等長変換することにより, $A = ik, B = i$ とできる. 図のようにおく. 系 5.11 より, $c = \log k$ がわかる. よって



$$\cosh c = \frac{e^c + e^{-c}}{2} = \frac{k^2 + 1}{2k}. \quad (6.1)$$

また, 接線と弦のなす角の性質から, A は AO を延長した線が AC の作る円と交わって出来る弦の作る円周角と等しいが, PQ は直径なのでそれは $\angle AQO$ と等しい. 同様に B でも考えて, $\angle AQO = A, \angle BPO = B$ が成り立つ. よって

$$u = \frac{1}{\tan B}, \quad v = \frac{k}{\tan A}. \quad (6.2)$$

ここで、三角形 AOQ は直角三角形なので $AQ^2 = v^2 + k^2$ で、 $AQ = CQ$ なので $CQ^2 = v^2 + k^2$. 同様に三角形 BOP は直角三角形なので $BP^2 = 1 + u^2$ で、 $BP = CP$ なので、 $CP^2 = 1 + u^2$ となる. これらをまとめて

$$AQ^2 = CQ^2 = v^2 + k^2, \quad BP^2 = CP^2 = 1 + u^2. \quad (6.3)$$

さて、PCQ は直角三角形なので

$$(u + v)^2 = PC^2 + QC^2 = PB^2 + QA^2 = 1 + u^2 + v^2 + k^2.$$

整理して

$$2uv = 1 + k^2 \quad (6.4)$$

を得る. これと (6.1), (6.2) から

$$\cosh c = \frac{1}{\tan A \tan B} \quad (6.5)$$

を得る. これで (h1) が示された. また, \tanh の定義式 $\tanh c = (e^{2c} - 1)/(e^{2c} + 1)$ と $c = \log k$ から

$$\tanh c = \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1} = \frac{uv - 1}{uv} \quad (6.6)$$

となる. 次に BC の長さを求める. $\angle OPC = \theta$ とおくと BC のパラメーター表示は $r(\cos \varphi + u, \sin \varphi)$, $\pi - \theta \leq \varphi \leq \pi - B$ なので $d(B, C) = a$ は

$$a = \int_{\pi-\theta}^{\pi-B} \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right]_{\pi-\theta}^{\pi-B} = \frac{1}{2} \log \frac{(1 + \cos B)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos B)(1 + \cos \theta)}. \quad (6.7)$$

これを $\tanh a$ の定義式 $\tanh a = (e^{2a} - 1)/(e^{2a} + 1)$ に代入して

$$\begin{aligned} \tanh a &= \frac{\frac{(\cos B + 1)(\cos \theta - 1)}{(\cos B - 1)(\cos \theta + 1)} - 1}{\frac{(\cos B + 1)(\cos \theta - 1)}{(\cos B - 1)(\cos \theta + 1)} + 1} \\ &= \frac{(\cos B + 1)(\cos \theta - 1) - (\cos B - 1)(\cos \theta + 1)}{(\cos B + 1)(\cos \theta - 1) + (\cos B - 1)(\cos \theta + 1)} = \frac{\cos B - \cos \theta}{1 - \cos B \cos \theta} \end{aligned} \quad (6.8)$$

を得る.

ここで CPQ は直角三角形なので $\cos \theta = \sqrt{1 + u^2}/(u + v)$. また BPO も直角三角形なので $\cos B = u/\sqrt{1 + u^2}$. これらを (6.8) に代入して

$$\tanh a = \frac{uv - 1}{v\sqrt{1 + u^2}} = \frac{uv - 1}{uv} \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \quad (6.9)$$

を得る. これに (6.6) ともう一度 $\cos B = u/\sqrt{1 + u^2}$ を代入して

$$\tanh a = \tanh c \cos B \quad (6.10)$$

を得る. $C = \pi/2$ だが, A, B には何の制約も無いのでこれらを入れ替えても正しい式が得られる. よってこの式で a, b と A, B を入れ替えたものを考えて (h2) が示される.

さて, (6.5), (6.10) の両辺を二乗して

$$\cosh^2 c = \frac{1}{\tan^2 A \tan^2 B}, \quad \tanh^2 a = \tanh^2 c \cos^2 B$$

であるが, $1 + \tan^2 B = 1/\cos^2 B$ なのでこれに代入して

$$1 + \frac{1}{\cosh^2 c \tan^2 A} = \frac{\tanh^2 c}{\tanh^2 a} = \frac{\sinh^2 c \cosh^2 a}{\cosh^2 c \sinh^2 a}$$

を得るが両辺に $\cosh^2 c$ をかけて

$$\cosh^2 c + \frac{1}{\tan^2 A} = \sinh^2 c \frac{\cosh^2 a}{\sinh^2 a} = \sinh^2 c \frac{1 + \sinh^2 a}{\sinh^2 a} = \frac{\sinh^2 c}{\sinh^2 a} + \sinh^2 c$$

となる. この式で $\sinh^2 c$ を移項して $\cosh^2 c - \sinh^2 c = 1$ を使うと

$$1 + \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{\sinh^2 c}{\sinh^2 a}$$

となるが左辺は $1/\sin^2 A$ なので

$$\sinh a = \sin A \sinh c \quad (6.11)$$

を得る. 同様にこれの a, b と A, B を入れ替えて

$$\sinh b = \sin B \sinh c \quad (6.12)$$

を得るので, (h3) が示された. 次に (6.10) を

$$\sin B = \sqrt{1 - \frac{\tanh^2 a}{\tanh^2 c}}$$

と変形し, これに $\cosh a$ を掛けたものを計算してみる:

$$\sin B \cosh a = \sqrt{1 - \frac{\sinh^2 a \cosh^2 c}{\cosh^2 a \sinh^2 c}} \cosh a = \frac{1}{\sinh c} \sqrt{\cosh^2 a \sinh^2 c - \sinh^2 a \cosh^2 c}.$$

ここで $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$, $\cosh^2 c - \sinh^2 c = 1$ を使って \cosh を消すと

$$\sin B \cosh a = \sqrt{1 - \frac{\sinh^2 a}{\sinh^2 c}} = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \cos A \quad (6.13)$$

を得る. これで (h4) が示された. 次に (6.13) から

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B}, \quad \cosh b = \frac{\cos B}{\sin A}$$

を得る. (6.5) の右辺を \sin, \cos で表して代入して

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

を得る. これが (h5). 最後に $\tanh a = \frac{\sinh a}{\cosh a}$ であるが, (h3), (h4) から

$$\tanh a = \frac{\sinh c \sin A}{\frac{\cos A}{\sin B}} = \frac{\sinh c \sin A \sin B}{\cos A}$$

であるが (h3) から

$$\tanh a = \sinh b \tan A$$

を得る. 同様に a, b と A, B を入れ替えて (h6) が示される. □

式 (h5) は直角双曲三角形に対するピタゴラスの定理といえよう. この定理から一般の三角形に対して次の定理を得る.

定理 6.9. H の三角形 ABC に対して

$$(H1) \quad \frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$$

$$(H2) \quad \begin{aligned} \cosh a &= \cosh b \cosh c - \cos A \sinh b \sinh c \\ \cosh b &= \cosh c \cosh a - \cos B \sinh c \sinh a \\ \cosh a &= \cosh a \cosh b - \cos C \sinh a \sinh b \end{aligned}$$

$$(H3) \quad \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \cosh a \sin B \sin C \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \cosh b \sin C \sin A \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \cosh c \sin A \sin B \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 三角形 ABC の頂点 C から辺 AB 上に垂線を下ろし, その足を D とし, CD の長さを d , 辺 AD の長さを c' とする (図 6.4). 直角三角形 ADC と BDC に定理 6.8 (h4)

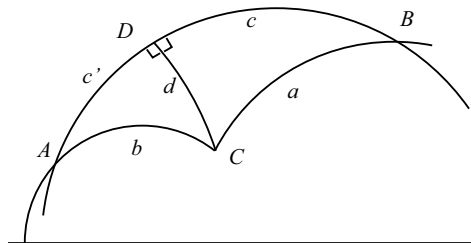


図 6.4: 定理 6.9 の証明.

を適用すると

$$\sinh d = \sinh b \sin A, \quad \sinh d = \sinh a \sin B$$

を得る. よって

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b}$$

が成り立つ. これは A と C に対しても成立するので (H1) を得る.

次に (h5) を直角三角形 ADC, BDC に適用して

$$\cosh b = \cosh d \cosh c' \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} \cosh a &= \cosh d \cosh(c - c') \\ &= \cosh d(\cosh c \cosh c' - \sinh c \sinh c') \end{aligned} \tag{6.15}$$

となる. (6.15) を (6.14) で割って

$$\frac{\cosh a}{\cosh b} = \cosh c - \sinh c \tanh c' \tag{6.16}$$

を得る. ここで直角三角形 ADC に (h2) を適用して $\tanh c' = \tanh b \cos A$ なのでこれを (6.16) に代入して

$$\frac{\cosh a}{\cosh b} = \cosh c - \sinh c \tanh b \cos A$$

となるが, $\cosh b$ を移項すれば (H2) の最初の式が得られる. あとは A, B, C を適当に入れ替えれば (H2) が示される.

次に (H3) を示すが, 簡単のために

$$c_a = \cosh a, \quad c_b = \cosh b, \quad c_c = \cosh c, \quad s_a = \sinh a, \quad s_b = \sinh b, \quad s_c = \sinh c$$

と置いておく. このとき (H2) は

$$\cos A = \frac{c_b c_c - c_a}{s_b s_c}, \quad \cos B = \frac{c_c c_a - c_b}{s_c s_a}, \quad \cos C = \frac{c_a c_b - c_c}{s_a s_b} \tag{6.17}$$

である. よって

$$\begin{aligned} \sin^2 B &= 1 - \left(\frac{c_c c_a - c_b}{s_c s_a} \right)^2 \\ &= \frac{s_c^2 s_a^2 - c_c^2 c_a^2 + 2c_a c_b c_c - c_b^2}{s_c^2 s_a^2} \\ &= \frac{(c_c^2 - 1)(c_a^2 - 1) - c_c^2 c_a^2 + 2c_a c_b c_c - c_b^2}{s_c^2 s_a^2} \\ &= \frac{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2}{s_c^2 s_a^2} \end{aligned}$$

となる. ここで $c_a^2 - s_a^2 = 1$, $c_c^2 - s_c^2 = 1$ を使った. ゆえに

$$\sin B = \frac{\sqrt{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2}}{s_c s_a}, \quad \sin C = \frac{\sqrt{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2}}{s_a s_b} \quad (6.18)$$

となる. (6.17) と (6.18) から

$$\begin{aligned} \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C} &= \frac{(c_c c_a - c_b)(c_a c_b - c_c) + (c_b c_c - c_a) s_a^2}{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2} \\ &= \frac{(c_c c_a - c_b)(c_a c_b - c_c) + (c_b c_c - c_a)(c_a^2 - 1)}{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2} \\ &= c_a \frac{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2}{1 + 2c_a c_b c_c - c_a^2 - c_b^2 - c_c^2} = c_a = \cosh a \end{aligned}$$

となり (H3) の初めの式を得, 同様の議論で (H3) が示される. \square

定理 6.9 と定理 6.2 を組み合わせれば \mathbf{H} 内の三角形の, いろいろな合同条件ができる.

演習 6.10. \mathbf{H} 内の三角形の合同条件を作れるだけ作れ.

6.4 円盤モデル

\mathbf{H} と同じモデルを与える円盤モデルというものがある. それを導入しよう.

定義 6.11. $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ を単位円盤という.

単位円盤上の距離を以下のように定める.

定義 6.12. 曲線 $\gamma: I \rightarrow D$ の長さ L_D とは

$$\int_I \frac{2}{1 - |\gamma|^2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt.$$

同様に距離を定めよう.

定義 6.13. $z, w \in D$ の距離 $d_D(z, w)$ を

$$\inf_{\gamma} \{L_d(\gamma) \mid \gamma: I \rightarrow D, \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$$

と定義する.

上半平面のときと同様に以下が成立する.

定理 6.14. (D, d_D) は距離空間である.

証明. 省略 \square

定義 6.15. この (D, d_D) をポアンカレ円盤という. 以降, D と書いたら (D, d_D) のこととする.

定理 6.16. (D, d_D) と (\mathbf{H}, d_h) に等長写像が存在する.

まず次の補題を示そう.

補題 6.17. $\varphi(z) = (z - i)/(z + i) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ は \mathbf{H} を D に写す.

証明. $z \in \mathbf{R}$ とすると, $|\varphi(z)| = 1$ がわかる. また $\varphi(i) = 0$ から結論が言える. \square

定理 6.16 の証明. φ が等長写像であることを示せばよい. 計算は少々めんどうだが, 定理 5.8 の証明と全く同様なので省略. \square

定理 6.16 により, \mathbf{H} を考えることと D を考えることは距離空間として見ると全く同じであるということが分かった.

定理 6.18. D の測地線は単位円と直交する円周の一部か単位円と直交する直線の一部である.

証明. 定理 5.12 から, \mathbf{H} の測地線は分かっている. \mathbf{H} と D の間に等長変換があるので \mathbf{H} の測地線を D にもって来ればよい. そのとき測地線がどうなるかは定理 5.12 の証明と同じ議論をすればよい. \square

6.5 クラインモデル

ポアンカレモデルは $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ に距離を定義したものであった. このモデル上では測地線は曲がった線になる. 測地線がユークリッドのときと同じように線分になるモデルは作れないものか. それがクラインモデルである. クラインモデルも同じ D に別の距離を定義したものである. 距離から定義することもできるがここではポアンカレモデルからクラインモデルへの写像を作って強引に距離を定義してしまおう.

写像 $f : D \rightarrow D$ を

$$f(z) = \frac{2z}{1 + |z|^2}$$

と定義する. これが D から D への全単射を与えていることを見よう. まずは f をすこし計算しておこう. z を極形式で $re^{i\theta}$ と書くと

$$f(z) = \frac{2re^{i\theta}}{1 + r^2} = \frac{2r}{1 + r^2} e^{i\theta}$$

となる. ここで $R := \frac{2r}{1+r^2}$ とおいて R が何か見る. $\tan(x/2) = r$ とおくと $\sin x = R = 2r/(1+r^2)$ となる. よって, R は 1 以下であることがわかる. さらに $R = 1$ となるの

は $x = \pi/2$ であるが, $r < 1$ と $\tan(x/2) = r$ から, $x < \pi/2$ が分かり, $R < 1$ が分かる. また, $\frac{2r}{1+r^2}$ を微分することにより, これが単調増加であることが分かる.

さて, f 全射性から示そう.

任意の $w \in D$ をとる. $w = Re^{i\alpha}$ と書く. r を $R = 2r/(1+r^2)$ となる数, θ を α として $z = re^{i\theta}$ とすれば $f(z) = Re^{i\alpha} = w$ となるので全射であることがわかる.

f の単射性は $2r/(1+r^2)$ の単調増加性からすぐに従う.

この f をつかって D に新しい距離 d_k を入れる: $z, w \in D$ の距離 $d_k(z, w)$ を $d_h(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$ で定義する. これにより (D, d_k) は距離空間で, 明らかにポアンカレモデルと等距離同型である. これをクラインモデルという.

クラインモデルでの測地線を調べよう. ポアンカレモデルの測地線が f でどのように写るか見ればよい.

ポアンカレモデルでの測地線を考えて, 点 $x = x+0i$ 中心, 半径 $\sqrt{x^2-1}$ の円が f でどうなるかを見ればよい. z がこの円上にあるとしよう. 条件からこれは

$$\left(\sqrt{x^2-1} \cos \theta + x, \sqrt{x^2-1} \sin \theta \right)$$

とパラメータ表示できる. この複素数を z とおく. $|z|^2$ を計算しておこう.

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (x^2-1) \cos^2 \theta + 2x\sqrt{x^2-1} \cos \theta + x^2 + (x^2-1) \sin^2 \theta \\ &= 2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} \cos \theta - 1 \end{aligned}$$

となる. よって f でおくと

$$\begin{aligned} \frac{2z}{1+|z|^2} &= 2 \frac{\sqrt{x^2-1} \cos \theta + x + i\sqrt{x^2-1} \sin \theta}{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} \cos \theta} \\ &= \frac{1}{x} + i \frac{\sqrt{x^2-1} \sin \theta}{x^2 + x\sqrt{x^2-1} \cos \theta} \end{aligned}$$

となるが, 実部は $1/x$ で定数である (θ に依存しない). これは f の像が直線であることを意味する.

f は $|z|=1$ のとき $f(z) = z$ となるので D の境界上を動かさない. すなわち, f によって測地線は測地線と D の境界の二点を結ぶ線分に写ることがわかる.

A 指数関数, 三角関数の定義とオイラーの公式

実数 e とは極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

と定義される数 $2.718281828459045 \dots$ のことである. この数 e の x 乗で定義される関数を指数関数とよび, e^x と書く. x が無理数のときは有理数乗の極限として定義する.

この定義は別に問題はないのだが、なんだか冗長ですっきりしない。また、指数を複素数まで考えるのには不都合がある。よって本節では指数関数、三角関数について考え直してみよう。そのために、関数を定義する手段を獲得せなければならない。まずは収束している数列について項の順序交換がいつ可能になるか考えよう。

A.1 収束級数の順序交換

級数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ を考える。各項の絶対値 $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ も収束しているとき絶対収束しているという。絶対収束している級数は収束する。ただし、逆は成り立たない。収束しているが絶対収束していない級数は条件収束しているという。

実数の和に関して交換法則が成り立つ。ただし、無限個の和、すなわち級数に関しては順序を交換すると結果が変わってしまうことがある。

例 A.1.

$$\frac{(-1)^{i-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2, \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \log 2.$$

後者の級数は前者の級数の負の項が2つおきになるように後ろにずらしたもの。

このように無限級数の範囲では和の順序交換は自由にできないのであるが、自由にしてよいのが絶対収束の場合である。

定理 A.2. $\sum a_i$ が絶対収束するならば、和の順序をどう変えても収束値は変わらない。

証明. 微分積分や解析学と書いてある本には必ず載っている □

絶対収束していれば無限和であろうと順序交換をすきにしてよいのである。

A.2 関数項級数

関数 $f_i(x)$ の無限和

$$S(x) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

を関数項級数という。これらの関数の定義域を I と書いておく。任意の $x \in I$ に対して級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

が収束するとき、 $S(x)$ は**収束する**という²⁶。部分和を $S_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$ と書いておこう。収束するという条件は

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \text{s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

であることに注意しておく。もっと言うと、 ε に対する n_0 は x に依存して定まっている。これに対して、以下のような条件を考えてみよう。

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \text{s.t. } \forall x \in I, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

これは収束が定義域 I 全体でだいたい同じ感じであることを意味している。関数項級数がこちらの意味で収束する場合、 I 上で**一様収束する**という。さて、一様収束は非常によい性質をもつ。

定理 A.3. 各 f_i が区間 I で連続で、 $\sum f_i$ が I 上で一様収束しているならば $S(x) = \sum f_i$ は I で連続である。

証明. 微分積分や解析学と書いてある本には必ず載っている。□

一様収束を導入した理由はこんなものではない。次の定理が成り立つことが非常に大事である。

定理 A.4. 各 f_i が区間 I で(連続的)微分可能²⁷で、 $\sum f_i$ が I 上で一様収束しているならば次が成り立つ。

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i(x) dx, \quad \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_i(x)$$

証明. 微分積分や解析学と書いてある本には必ず載っている。□

すなわち、微分や積分と極限を交換してもよい。一般に極限の関数はよく分からない形をしているので、極限をとるまえに微分や積分をしたいのであるが、一様収束していればこれが許されるのである。逆に言うと、一様収束していなければ許されないので注意が必要なわけである。

A.3 ベキ級数

不定元 x に関する無限和

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

²⁶各点収束という

²⁷一階微分可能で導関数が連続という意味。二階微分可能ならば成り立つ。応用上使う関数はほとんど無限回微分可能なので、あまり気にしなくてよい。

をべき級数という。不定元でなく、 x を区間 I の元と思えば各項 $a_i x^i$ は関数であるので、これは関数項級数の一種である。べき級数はいつ収束するのだろうか、一様収束、絶対収束はどうなるのであろうか。それを考えよう。

定理 A.5. べき級数 $\sum a_i x^i$ が $x = x_0$ で収束するならば $|x| < |x_0|$ である全ての値について絶対収束し、开区間 $(-|x_0|, |x_0|)$ に含まれる任意の閉区間上で一様収束する。

証明. 微分積分や解析学と書いてある本には必ず載っている。□

この定理は x が複素数の場合も同じように成り立つ。

この定理から、ある値 x で収束すれば、それよりも絶対値が小さな x では収束するので、べき級数が収束するような x の絶対値の上限 r が存在する。これを**収束半径**という。絶対値が r より小さい x の集合を**収束円**という。べき級数が任意の x に対して収束するときは便宜上 $r = \infty$ とする。今までの考察をまとめて次を得る。

定理 A.6. べき級数 $\sum a_i x^i$ は収束円の内部において連続な関数を定める。これを $f(x)$ とすれば f は微分可能で、導関数は

$$f'(x) = \sum a_i i x^{i-1}, \quad f^{(k)}(x) = \sum a_i i(i-1)\cdots(i-k+1)x^{i-k}$$

となる。

これでべき級数が関数を定められることがわかった。しかし収束半径の計算ができないと意味がないので、一つ収束半径の求め方を示しておく。

定理 A.7. べき級数 $\sum a_i x^i$ に対して極限 $\lim_{i \rightarrow \infty} |a_{i+1}|/|a_i| = R$ が存在するならば、収束半径 r は $r = 1/R$ である。ただし、 $R = 0$ のときは $r = \infty$ である。極限 $\lim_{i \rightarrow \infty} |a_i|^{1/i} = R$ が存在するならば、収束半径 r は $r = 1/R$ である。ただし、 $R = 0$ のときは $r = \infty$ である。

証明. 微分積分や解析学と書いてある本には必ず載っている。□

A.4 指数関数, 三角関数の定義

前節までで、準備が整った。べき級数で関数を定めることができるのである。

定義 A.8. 複素数 x に対して関数 $e^x, \sin x, \cos x$ を

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{A.1})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (\text{A.2})$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad (\text{A.3})$$

と定める²⁸ .

これらの級数は収束半径が ∞ で, x 複素数全体で微分可能な関数を定める.
ここで, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ に対して

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

が成立する²⁹. よって, $x + iy \in \mathbf{C}$ に対して

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

となるが,

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \cdots = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right)$$

なので³⁰

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{A.4}$$

という有名な式を得る. これを**オイラーの公式**という³¹. この式において y を $-y$ とすれば

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

となるのでこれを (A.4) と組み合わせて

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{A.5}$$

を得る. このように, 我々になじみの深い三角関数は, 複素数の関数まで考えると, (A.5) のように書けることが分かる. 三角関数の加法定理は (A.5) から直接示せる.

A.5 オイラーの公式の雰囲気による証明

前節まででオイラーの公式を厳密に示すことができた. しかし, かなりきつい. もうちょっとヌルい証明はできないものか? こんなのはいかがだろう?

関数 $f(x) = e^{ix}$ は複素数値とする. これの絶対値は $e^{ix}\overline{e^{ix}}$ である. これを微分してみると

$$(e^{ix})'\overline{e^{ix}} + e^{ix}\overline{e^{ix}'} = ie^{ix}\overline{e^{ix}} + e^{ix}\overline{ie^{ix}} = ie^{ix}\overline{e^{ix}} - ie^{ix}\overline{e^{ix}} = 0$$

²⁸ e^x のことを $\exp(x)$ と書く流儀もある. 肩に乗っている部分が複雑だと後者の書き方が見やすいが, それだけの理由なので戸惑わないように. たとえば「 $e^{-x^2} = \exp(-x^2)$ だったら右辺の方が見やすいでしょ。」ってだけ.

²⁹このことはたとえば, 「右辺を無限級数の形に書いておいて展開する. 二項定理を使って次数ごとにくくり直すと左辺になる. 級数は絶対収束しているのでこのような操作が許される。」のようにして示せる.

³⁰ここでも級数の絶対収束性を使っていることに注意せよ.

³¹特に $y = \pi$ とおいて $e^{i\pi} = -1$ とした式が非常に有名で, **オイラーの等式**と呼ばれることもある.

ゆえに $f(x)$ の絶対値は定数である. さらに $f(0) = e^0 = 1$ なので $f(x)$ は複素平面において半径が 1 の円上にある.

一方 $(f'(x)\overline{f'(x)})' = 0$, $f'(0)\overline{f'(0)} = 1$ が同じ計算によってわかる.

これらをまとめると, $f(x) = e^{ix}$ は \mathbf{C} を \mathbf{R}^2 だと思ったとき, $x = 0$ のとき $(1, 0)$ にあり, 半径 1 の円上を速さ 1 で動いていることになる. ということは時間が x 経過した後には $(\cos x, \sin x)$ にある³² ことになる. よって

$$e^{ix} = f(x) = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ.

A.6 逆三角関数とその応用 : 円周率の計算

三角関数の逆関数をそれぞれ $\arcsin, \arccos, \arctan$ と書く. 三角関数は単射ではないので逆関数は考えられないが, 値を 0 から 2π までに制限することにより関数とすることができる. これを逆三角関数の**主値**という. 値を主値に制限した逆三角関数を Arcsin などと書くこともある. また, 定義域に対して値が複数ある関数とみなすという考え方もある. このような関数を**多価関数**という.

逆三角関数の微分を見ていこう. $x = \sin y$ とおく. $dx/dy = \cos y$ である. よって $dy/dx = 1/\cos y = 1/\sqrt{1 - \sin^2 y} = 1/\sqrt{1 - x^2}$ である. ゆえに $d \arcsin x/dx = 1/\sqrt{1 - x^2}$ となる. 他の関数も同様に計算できる. まとめておこう.

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

さて, 逆関数のべき級数による表示を \arctan について与え, その応用を述べる. まず, 初項 1, 公比 $-t^2$ の等差数列の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2}$$

を 0 から x まで定積分しよう. $1/(1 + t^2)$ を積分すると \arctan になることから

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R(x) \quad \left(R(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \right)$$

となる. ここで, $R(x)$ を評価しよう. $1 + t^2 \geq 1$ から,

$$|R(x)| = \int_0^{|x|} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \leq \int_0^{|x|} (-1)^{n+1} t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

³²ラジアンラジアンの定義は半径 1 の円において中心角と弧の長さが一致するようにする角度であることに注意.

と、積分区間において $1+t^2 \leq 1+x^2$ から、

$$|R(x)| = \int_0^{|x|} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt \geq \int_0^{|x|} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+x^2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(1+x^2)}$$

となる。よって $|x| \leq 1$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0$$

なので、

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{A.6})$$

と $|x| \leq 1$ の範囲でべき級数表示できる³³。さて、(A.6)において $x=1$ としてみよう。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad (\text{A.7})$$

これを**ライプニッツの公式**という。この級数を使って円周率を計算してみよう。第100項まで計算すると3.15...となる。第1000項までで3.143...となる。第100000項までで3.1416...となる。非常に収束が遅く、使えないことが分かるだろう。

ここで以下の複素数に関する掛け算を実行してみよう。 $(5+i)^4 = (239+i)(2+2i)$ 。これから $2+2i = (5+i)^4 / (239+i)$ が得られる。よって両辺の複素数の偏角をとると $\arg(2+2i) = \arg(5+i)^4 / (239+i)$ となるが左辺は $\pi/4$ で、複素数の掛け算は回転であることを考慮すると

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

が得られる。これを**マチンの公式**という。(A.7)をこれに代入すると

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \cdots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} + \cdots \right)$$

を得る。これを用いて円周率を計算してみよう。なんと第3項ですでに3.1415917...となり、第10項まで計算すると

$$\begin{aligned} & 3.14159265358979329 \dots \\ \pi = & 3.14159265358979323 \dots \end{aligned}$$

となる。第50項で

$$\begin{aligned} & 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164064 \dots \\ & 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062 \dots \end{aligned}$$

まで行く(下段は π の値)。なんてことのない式に思える

$$(5+i)^4 = (239+i)(2+2i)$$

を、工夫次第でこんなに役立てることができる。

³³ n 階微分した形がどうなるかを頑張って計算しなくても、こうすればテーラー展開できる。

B 双曲線関数

B.1 双曲線関数の定義

三角関数の幾何的意味を思い出しておこう. 原点中心で半径が1の円, すなわち $x^2 + y^2 = 1$ において, 中心角が θ の扇形の面積は $S = \theta/2$ である. 中心角が θ である円上の点の x 座標は $\cos \theta$ であるが, これは $\cos(2S)$ と解釈できる (図 B.1 左右). さて, 三角関数は

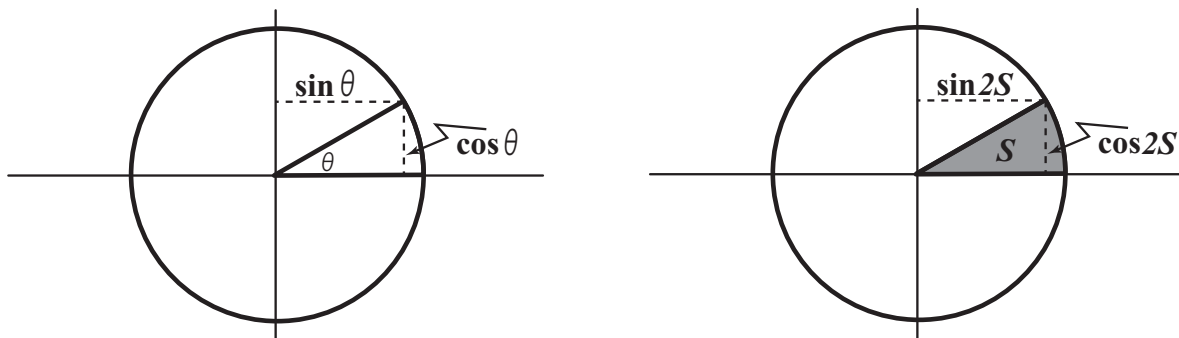


図 B.1: 円上の点の座標

複素数まで使うと

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (\text{B.1})$$

とあらわされる.

さて, 双曲線関数は三角関数の類似として定義される. (B.1) を参考に

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{B.2})$$

と定義しよう. これらを**双曲線関数**と呼び, $\cosh x$ を**ハイパボリックコサイン**, $\sinh x$ を**ハイパボリックサイン**という³⁴.

B.2 双曲線関数の基本性質

容易に分かるように

$$\cosh x = \cos(ix), \quad \sinh x = -i \sin(ix)$$

が成り立つ. 加法定理は (B.2) から計算して³⁵

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \end{aligned}$$

³⁴長いので, \cosh をコッシュ, \sinh をシンシュ, シンチという. ch , sh と書かれることもある. Hyperbolic とは「双曲線の」という意味.

³⁵計算してみよ

となる. 微分は

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

となる³⁶. さらに, これらの逆関数 \cosh^{-1} , \sinh^{-1} は

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

となる³⁷.

ここで, (B.2) から,

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

を得る. この意味は (x, y) を双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点とすると, (x, y) は

$$(\pm \cosh \theta, \sinh \theta)$$

を満たす, すなわち, 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は $(\pm \cosh \theta, \sinh \theta)$ とパラメーター表示できることを示している. 三角関数は円をパラメーター表示するときに使ったが, 双曲線関数は双曲線をパラメーター表示するとき使える.

B.3 双曲線と双曲線関数

双曲線関数が双曲線のパラメーター表示であることを幾何的に見てみよう. まず, 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点 $p = (x, y)$ について, 図の灰色部分の面積を求めよう. 双曲線は $y = \sqrt{x^2 - 1}$ となるので $\int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx$ を求めて³⁸ 三角形の部分も求めて引くと

$$S = \frac{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2} = \frac{\log(y + \sqrt{y^2 + 1})}{2}$$

となる. よって, $x = \cosh(2S)$, $y = \sinh(2S)$ となる (図 B.2).

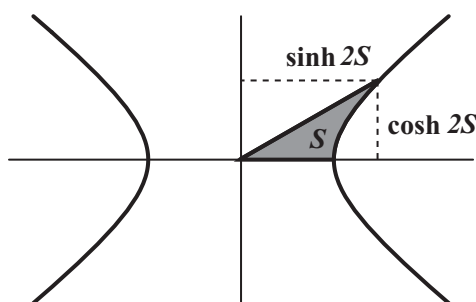


図 B.2: 双曲線上の点の座標

³⁶計算してみよ

³⁷ e^x に関する二次方程式を解けばよい. 計算してみよ

³⁸ $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$ と置換積分する. 計算してみよ.

B.4 懸垂線

ここで、 $y = \cosh x, y = \sinh x$ のグラフを書いておこう (図 B.3 左).

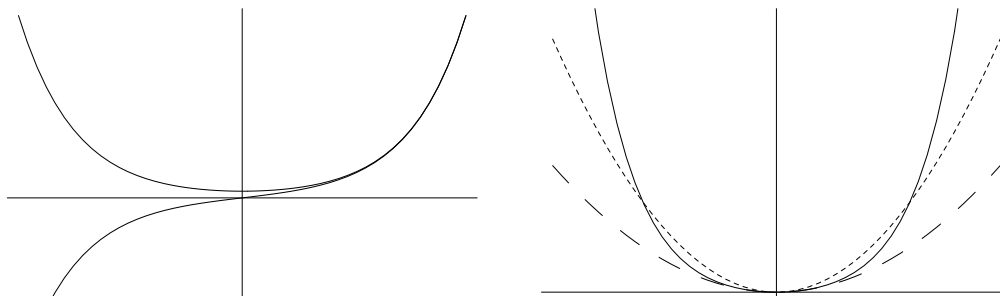


図 B.3: (左) : $y = \sinh x$ と $y = \cosh x$ のグラフ, (右) : $y = \cosh x - 1, y = x^2$ と $y = x^2/2$ のグラフ (実線が懸垂線, 細かい点線が $y = x^2$, 粗い点線が $y = x^2/2$.)

$y = \cosh x$ のグラフは懸垂線やカテナリーと呼ばれる³⁹. 電信棒からぶらさがる電線など, ヒモをつるしたときに出来る曲線は懸垂線となる⁴⁰. また, 懸垂線と放物線を同時に書いておこう (図 B.3 右)⁴¹.

懸垂線は身の回りに多い. 電線の曲線がその例であるが, 針金で同じ円を2つ作り, それを平行に置く. そこに石鹸膜を張ると懸垂線を x 軸の周りに一回転させた曲面 (懸垂面・カテナイドという) が現れる (図 B.4). これは懸垂面が2つの円を結ぶ曲面の中で面積が最小であることを意味している. よって, シャボン玉で遊んでいるときにはおそらく懸垂面を目にしているであろう. 屋根等のアーチもこの曲線の形であることが多いらしい.

参考文献

本ノートを書くにあたって次を参考にした.

- [1] L. V. Ahlfors 著, *Complex analysis*, McGraw Hill Higher Education, 1980.
- [2] S. ドゥージン, B. チェボタレフスキー著, 名倉訳, 変換群入門, シュプリンガー, 200.
- [3] 深谷賢治著, 双曲幾何, 岩波書店, 2004.

³⁹ホイヘンスによる. “catena”=鎖. 直後に書いてあるように鎖等をぶら下げたときにできる曲線のためであろう.

⁴⁰高校数学の, 微分方程式の良い練習問題. 興味があれば自分で示してみよ.

⁴¹ガリレオはこれが放物線と似ていると言っている. 確かに懸垂線と放物線 $y = 1 + x^2/2$ は原点付近で非常に近い. 実際, $\cosh x$ をテイラー展開してみると三次の項まで一致することがわかる. 放物線だと思ってしまいそうなところであるが, 似ていると我慢したところはさすがはガリレオ大先生と言ったところか.

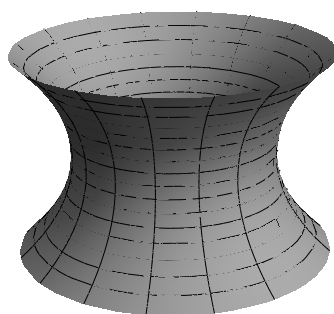


図 B.4: カテノイド (シャボン膜曲面)

- [4] R. Hartshone 著, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000.
- [5] 堀田良之著, 代数入門, 裳華房, 1987.
- [6] 木村俊房・高野恭一著, 関数論, 朝倉書店, 1991.
- [7] 小林昭七著, ユークリッド幾何から現代幾何へ, 日本評論社, 1990.
- [8] 熊原啓著, 行列・群・等質空間, 日本評論社, 2001.
- [9] B. O'Neil 著, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1983.
- [10] 辻正次著, 複素関数論, 朝倉書店, 1968.